

学位論文及び審査結果の要旨

横浜国立大学

氏名	阿部 敏生
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	環情博甲第2214号
学位授与年月日	令和3年3月25日
学位授与の根拠	学位規則（昭和28年4月1日文部省令第9号）第4条第1項及び 横浜国立大学学位規則第5条第1項（論博の場合は第2項）
学府・専攻名	環境情報学府 情報環境専攻
学位論文題目	Colorings and dominating sets of graphs on surfaces
論文審査委員	主査 横浜国立大学 准教授 小関健太 横浜国立大学 教授 根上生也 横浜国立大学 教授 中本敦浩 横浜国立大学 准教授 白崎実 横浜国立大学 講師 白川 真一

論文及び審査結果の要旨

閉曲面上のグラフの彩色の問題は、四色定理の代表されるようにグラフ理論の中心的な話題の1つであり、四色定理の解決以降も、平面および閉曲面上のグラフの彩色について多くの研究がなされてきた。特に、リスト彩色と呼ばれる特別な彩色は理論的な興味から特別な注目を集めている。さらに最近では、リスト彩色を拡張した概念も提案されており、これらの彩色についての研究が、現在の彩色問題の主流となっている。本学位論文では、閉曲面上のグラフの彩色とリスト彩色を中心に、その発展と支配集合と呼ばれる実用上の概念への応用を述べている。

本論文は Introduction と全5章で構成されている。Introduction では本論文のモチベーションについて、背景となっている先行研究や本分野の現状が詳しく説明されている。第1章では、第2章以降で登場する定義・概念が簡潔に解説されており、第2章～第5章では阿部氏の研究について述べられている。

第2章では、Colorings for planar graphs という題目で、平面グラフにおける彩色、リスト彩色、およびリスト彩色の拡張である DP 彩色の関係がまとめられている。四色定理は平面グラフが4彩色できることを主張しており、また、Thomassen と Dvorak&Postle は、平面グラフはリスト5彩色できること、DP-5彩色できることをそれぞれ示している。それぞれの結果の色数の上界も最善であることがわかっており、平面グラフの個々の彩色についてはすでに多くの研究がなされてきた。その一方で、それらの彩色間については、自明なもの以外に多くはわかってこなかった。阿部氏はこの点に注目し、平面グラフで達成できる三つの彩色の染色数の値の組の列挙を行い、1つを除いて完成させている。この結果により染色数の分布の様子が明らかになっている。これは彩色間関係に注目した新しい方向性で、研究者間の評価も高い。

第3章では、The Alon-Tarsi number of K_5 -minor-free graphs という題目で、リスト彩色を DP-彩色とは別の方向に拡張した Alon-Tarsi 数に関して考察している。Wagner の古典的な特徴付けより、平面グラフは K_5 -マイナーと $K_{3,3}$ -マイナーの両方を持たないグラフと言い換えることができるが、そのうちの K_5 -マイナーのみを持たない場合に平面グラフと同じ結論が得られている。この結果から、平面性と言う幾何的な性質においても、 K_5 -マイナーという組合せ的な性質が本質的であるとわかり、興味深い。

第4章では、頂点ではなく辺の彩色を対象にしている。辺彩色のリスト彩色は「リスト彩色予

想」と呼ばれる、当該分野の大きな未解決問題があるが、その解決に貢献する指標が辺彩色の符号である。一般に符号を求めることは難しいが、阿部氏は、グラフを射影平面上のものに限定すればある種の幾何的性質からこれが可能となることを示している。また、これを用いて「リスト彩色予想」の部分的解決を得ている。

第5章では、支配集合とよばれる実用上、重要な対象へ平面グラフの着色を応用することを行っている。Tokunaga は、極大外平面グラフというグラフクラスにおいて、特別な彩色を考えることで支配集合を求める方法を示している。阿部氏はこれを拡張し、極大外平面グラフよりも広いグラフクラスで彩色を考えることで、同様に支配集合を求めている。

以上のように、本論文では、平面グラフの彩色とリスト彩色に関しての性質を解明するもので、独自の観点・手法によりこの課題について多角的に研究し、研究成果を高い完成度でまとめたものである。本論文を構成する主要な研究成果は、査読付論文誌に受理済の論文 2 編と投稿中の論文 2 編によって公表されており、高い評価を受けている。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分な価値を有すると、審査委員全員一致で認めるものである。

令和3年1月27日(水)13時45分からの博士論文公聴会終了後に、審査委員全員の出席のもとで、阿部 敏生氏の最終試験を行った。博士論文公聴会は、COVID-19 感染の状況を踏まえ、オンライン会議システムを通じて開催した。当該分野の外部の研究者を含めて18名が発表会に参加され、学位論文での研究内容の説明がなされたのち、活発な質疑応答がなされた。学力試験として、グラフ理論を中心とする専門分野および離散数学関連分野における口頭試問を行い、これらの分野の研究に関する深い専門知識と理解、および質疑応答における適切な対応能力を同氏が有することを確認した。外国語は、本学位論文や国際雑誌受理論文が英語で書かれていること、および英語での講演を行っていることをもって、十分な学力を有すると判定した。また、博士課程後期修了に必要な単位すべてを取得していることを確認した。

これらより、阿部 敏生氏が最終試験に合格であると、審査委員全員一致で判定した。

注 論文及び審査結果の要旨欄に不足が生じる場合には、同欄の様式に準じ裏面又は別紙によること。