

正負の数の乗法の構成的指導とその具体的な場面に関する研究

横浜国立大学大学院教育学研究科
大江 将史

1. はじめに

正負の数の乗法では、既習である正の数の範囲での乗法が、負の数も含めたものまで拡張される。現行の教科書や過去の実践では、東西への移動やトランプゲームなど、具体的な場面を用いることによって、生徒の正負の数の乗法についての計算規則の理解を促している。

具体的な場面を用いて正負の数の乗法の指導を行っていくとき、教師が具体的な場面によって規則を理解させるのではなく、生徒が具体的な場面によって拡張を考えていけることを目指していきたい。これは、古藤のいう「数学を創る」考えによるものである。古藤は、Do Math の解釈として次のように述べている。「Do Math の指導においては、数学の概念や法則、または問題解決の学習、さらには数学の体系づくりの活動に際して、ある程度は教師の支援を受けながらも、子どもたちが主体的に自分の力で解決したり、つくりあげることが期待しているのであるから、『数学を創る』と表現するのが適切であると考え」（古藤, 1991, pp10 - 11）。こういった指導によって、子供たちが主体的に自分の手で数学を創っていくという能力と態度を育成することが期待できるとしている。

拡張を生徒自身が行っていく事例には、山下（1990）、林（1993）、神林（2000）などがある。これらの先行研究においては、具体的な場면을基にして正負の数の乗法への拡張を考えている。

ここで、正負の数の乗法での具体的な場面の役割に着目する。具体的な場面は、拡張という目的があるときに、数式では考えていくことが抽象的なため、具体的に考えていくために用いられる。数式と具体的な場面を関連付け、その具体的な場면을基にして、正負の数の乗法の意味を考えていくことになる。また、拡張のための手段として用いられた具体的な場面は、正負の数の乗法からさらなる拡張を考える際にも基になりうるものである。

以上のように用いられる具体的な場面は、東西への移

動やトランプゲームなどさまざまであり、特徴は必ずしも同じではない。よって、用いる具体的な場面によって数式との関連づけは異なる。それに伴い、拡張を考える際の学習活動や、さらなる拡張を考える際の学習活動も異なってくると考えられる。

先行研究では、特定の具体的な場面を用いて拡張を考えていくことに焦点が当たっていた。一方で本研究では、拡張を生徒が行っていく際、用いられる具体的な場面が異なる場合の生徒の学習活動の違いに焦点を当てる。

拡張を生徒自身が行っていく際に用いる具体的な場面の分析に焦点を当てていくにあたり、拡張を生徒自身が行っていく際の学習の流れについても、どんな活動が生徒に期待されるかを明らかにしていく必要がある。

以上より本研究の目的は、正負の数の乗法において、生徒が拡張を行っていく学習の流れについて明らかにするとともに、その学習の流れにおいて用いる具体的な場面によって、生徒の学習活動に違いがあるのか分析を行うことである。

2. 研究の方法

研究の方法は以下の2つである。

1つ目に、正負の数の乗法において拡張を生徒が行っていけるような学習の流れについて、(i) (ii) により、明らかにする。

(i) 先行研究を基に、拡張において生徒に期待する活動として少なくともどのような活動を行っていくとよいかを考察する。

(ii) (i) でまとめた拡張の際に生徒に期待する活動について、正負の数の乗法の指導を考えると、具体的にどのように位置づけられるのかを、過去の事例を基に分析する。この時、拡張には乗数が負の数になる拡張と、被乗数が負になる拡張と、2種類考えられる。また、この2種類を関連付けていく活動も考えられる。本論文では、乗数が負の数になる拡

張,すなわち,(正の数)×(正の数)を基にして(正の数)×(負の数)への拡張を考えていく場合に焦点を当てる.被乗数が負になる拡張と,その際の乗数が負になる拡張との関連については,今後の課題とする.

2つ目に,学習の流れで用いる具体的な場面が異なる場合に,生徒の学習活動にどのような違いがあるのか分析する.

分析の対象・観点は以下のように設定する.

・分析の対象となる具体的な場面

過去の事例で用いられた具体的な場面は,「東西への移動」の他に,「トランプゲーム」や「ねじを回す場面」「ダムの水量」など様々である.その中でも特に多く用いられていたのは,「東西への移動」と「トランプゲーム」である.これに加え,乗法を取り決める指導として特徴的である数学第一類で用いられている「坂の場面」も対象として考える.数学第一類とは,生徒自らが数理を発見することを方針の一つとしている,戦時中に用いられていた教科書である.分析では,「東西への移動」「トランプゲーム」「坂の場面」の3つを対象とする.

・分析の観点について

正負の数の乗法の学習では,数式と関連付けられた具体的な場面を基にして,正の数の乗法から正負の数の乗法への拡張を考え,加えて更なる拡張を考えていくことになる.そのため,3つの具体的な場面がそれぞれ数式とどのように関連付けられるのかを明らかにし,それを基に以下の観点で分析を行う.

観点①:どのような活動により拡張を考えていくか

観点②:正負の数の乗法における3項以上の積をどのように考えていくか

観点③:高校数学におけるベクトルの実数倍へとどのようにつなげて考えていけるか

観点①について,どのような活動を通して拡張を考えていくのか,具体的な場面ごとの特徴を明らかにする.

観点②,観点③では,正の数の乗法から正負の数の乗法への拡張からの更なる拡張を考える際の学習活動の違いを明らかにする.

観点②について,3項以上の積を考えていく場合にどのように考えられるのかを分析し,具体的な場面で3項以上の積を考えていけるかについて明らかにする.

観点③について,正負の数の乗法で用いた具体的な場面がさらなる拡張であるベクトルの実数倍の考えへの橋

渡しになれば,ベクトルの実数倍を学習したときに,正負の数の乗法とつなげて考えることができる.そのため,正負の数の乗法からのさらなる拡張であるベクトルの実数倍と繋げて考えていけるかについて,明らかにする.

3. 正負の数の乗法における拡張

この章ではまず,先行研究を基にして,拡張を考える授業を行う際に,少なくともどのような活動を生徒に期待するかを明らかにする.その後,生徒に期待する活動を正負の数の乗法への拡張の際に用いると,どのような学習の流れになるのか,時系列を含めてまとめる.

(1) 拡張において生徒に期待する活動

まず,拡張を考える授業において生徒に期待する活動について明らかにする.

①拡張について

拡張的な考え方について,片桐は「ある事柄が分かっているとき,これを含むより広い範囲にまで広げていく,またはより広い範囲においてもそれがいえるようにするために,条件を少し変えてより包括的なものにする」(片桐,1995,p85)としている.また,中島は,拡張による統合として,「初めに考えた概念や形式が,もっと広い範囲(はじめの考えでは含まれない範囲のものまで)に適用できるようにするために,初めの概念の意味や形式を一般化して,もとのものも含めてまとめる場合である」(中島,2015,p127)と述べている.

これらから,拡張は,ある分かっている事柄を基にして,より広い範囲で考えていけるようにするために,意味や形式を一般化してもとのものも含めてまとめていくことだと考える.

生徒が拡張を行う学習の流れの中では,わかっている事柄を基に,その事柄における意味や形式を一般化してまとめていく活動は欠かせないものである.

次に,この拡張に向けてどのような活動が必要になるかを見ていくこととする.

②具体化について

拡張の考えによって,より広い範囲まで考えようとするとき,そのままでは抽象的でイメージがつきにくいことがある.抽象的なものについて考えるときに有効な手段として,彌永が「具体化して考えるのは,抽象的なものについて考えることを,妨げるどころか,むしろような助けとなるわけです」(彌永,2008,p79)と述べているように,具体化が挙げられる.こ

の具体化について、池田は、正負の数の乗法において教科書で扱われている東西への移動を取り上げて、次のように述べている。「この具体的な問題を解決すべき主たる目的として捉えるのではなく、『正負の数が現れ、加法・減法の仕方を構成してきた。それでは、かけ算も、これまでのかけ算と同じように考えられるのだろうか。』といった数学内で生じた問いの解決を目的として捉え、東西を歩く人の速さと時間の場面は、目的を達成するための手段として取り上げられたと考える」（池田、2017、p 372）。つまり、東西への移動のような具体的な場面は、数式のような数学の世界に生じた問題を解決することを目的としたとき、具体化して考えるための手段といえる。よって、拡張を行っていくとき、抽象的なものを具体化して考える活動が重要である。

③問いの設定について

ここまで、拡張の活動、拡張のための具体化の活動を生徒に期待する活動としてまとめた。これらの拡張・具体化を学習の流れの中で行うにあたり、欠かせない視点がある。それは、生徒が問いを設定することである。中島は、創造的な活動について次のように述べている。「算数や数学で、子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に、教師が既成のものを一方的に与えるのではなく、子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すように、教師が適切な発問や助言を通して仕向け、結果において、どの子どもも、いかにも自分で考えだしたかのような感激を持つことができるようにする」（中島、2015、p70）。つまり、新しい内容を学習していく際に、子どもが学習内容について必要性を感じるということが求められるということである。それは、拡張を行っていく過程でも同じことが言える。以上より、生徒が拡張を行っていく際に、拡張する必要性を感じるような問いを設定する活動が必要であると考えられる。

(2) 生徒に期待する活動のまとめ

ここまでをまとめると、拡張において生徒に期待する活動として、少なくとも3つ必要であることが分かった。その3つとは、わかっている事柄を基にその事柄における意味や形式を一般化してまとめていく活動、抽象的なものを具体化して考える活動、拡張する必要性を感じるような問いを設定する活動である。

この3つの活動は、正負の数の乗法で拡張を考えていく指導でどのように位置づけられるか。過去に行われた正負の数の乗法の拡張を行う指導を基に、3つの活動の位置づけについて分析を行う。

(3) 正負の数の乗法の具体的な事例における3つの活動の位置づけ

過去の日本数学教育学会誌、教育科学数学教育、教科書の中で、具体的な場面を用いて拡張を目指す事例として、数学第一類（1943）、山下（1990）、林（1993）、神林（2000）が挙げられる。このうち、山下、神林は、主に（負の数）×（負の数）に焦点を当てていたが、今回は正の数の乗法から正負の数の乗法への拡張に焦点を当てて分析していくため、数学第一類と林の事例を基にする。

①数学第一類の事例

(i) 問いを設定する活動

負ノ数ニ正ノ数ヲ掛ケタモノハ負ノ数デアル。

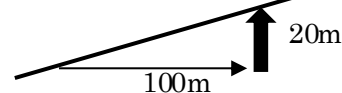
$$(-5) \times 7 = -35$$

ココデハ、正マタハ負ノ数ニ、負ノ数ヲ掛ケタモノノ符號ヲドウ定メタラヨイカヲ考ヘヨウ

乗数が負の数の時に乗法の解の符号がどうなるのかについて考えていく流れである。乗数が正の数の乗法と比較することで問いを持たせている。

(ii) 抽象的なものを具体化して考える活動

東西ニ走ル坂道ガアル。



ソノ勾配ハ水平距離 1 m ニツイテ 0.2 m ノ割合デ、東ガ高クナツテキル。

コノ坂ヲ水平距離 x m ダケ東ヘ進メバ、高サハ $(0.2 \times x)$ m ダケ高クナル。

コノ増シタ高サヲ計算スルノニ、 x ガ負ノトキニモ、コノ式ガ使ヘレバ便利デアル。

具体的な場面として坂の場面を取り上げ、正の数同士の乗法を具体化している。具体的な場面について、「コノ増シタ高サヲ計算スルノニ、 x ガ負ノトキニモ、コノ式ガ使ヘレバ便利デアル」と書かれている。ここでは、乗数が負の数の場合でも、具体的な場面における乗数が正の数の場合を用いて、条件を変えていけば乗数が負の数の場合でも考えていくことができることを示唆している。

(iii) わかっている事柄を基にその事柄における意味や形式を一般化してまとめていく活動

問 1. x が -100 ノトキ, ソノ増シタ高サハ何程カ.
 問 2. x ガ負ノ数ノトキニモ, ソノ増シタ高サヲ上ノ式デ計算デキルヨウニシタイ. 正ノ数ト負ノ数トノ掛ケ算ノ規則ヲドウキメタラヨイカ.

乗数が負の数の場合に高さがどうなるかを坂の場面で考えている. そして, 数式についてどうきめていくとよいかを生徒に委ねている.

②林の事例

(i) 問いを設定する活動

右のような表を提示し, 表 1 正負の数の乗法

正負の数の乗法にはどんな場合があるか見通しをもつ. そして, 斜線が既習であり, 他が未習であることに気が付く.

a/b	3	0	-3
2			
0			
-2			

その後, 2×3 , $(-2) \times 3$, $2 \times (-3)$ に合う問題文を発表する. その結果, 「 $(-2) \times 3$ についてはすぐに説明するが, $2 \times (-3)$ にはとまどっている生徒が多い.」としている. 乗数が負の数になると式の意味が捉えにくいことから, 乗数が負の数の場合にどのように考えていけばよいかといった問いを設定する. また, 教師の働きかけとして, 「(いくつ分) にあたる量が負の数にまで拡張できればよいことに着目させる」とあり, 具体的な場面について, 負の数まで表せるものが必要であることを示唆している.

(ii) 抽象的なものを具体化して考える活動

上記の示唆を受け, 次のような場面が提示される.

P1 が時速 2km で西から東へ進んでいる. 現在 O 地点を通過している. 3 時間後はどこにいるか.

ここでは, 東西への移動が取り上げられる.

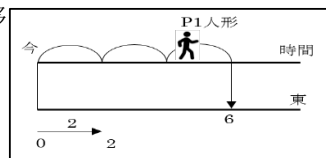


図 1: 東西への移動の場面

(iii) わかっている事柄を基にその事柄における意味や形式を一般化してまとめていく活動

具体的な場面が提示された後, 次の発問がなされる.

$2 \times (-3)$ の積はどうなるか. この文の一部を変えて $2 \times (-3)$ の積を求める問題をつくり, 数直線を使って求めなさい.

この発問に対し, 次の二つの考えが取り上げられる.

P1 が時速 2km で西から東へ進んでいる. 現在 O 地点を通過している. 3 時間前はどこにいたか.

〈考え A〉

P1 が時速 2km で東から西へもどる. 現在 O 地点を通過している. 3 時間後はどこにいるか.

〈考え B〉

これらの考えの違いについて, 数直線上で人形を動かす活動も踏まえつつ意見交換する. 結果, 〈考え B〉が正しいとして, 負の数の積の一般化を次時に行っている.

(4) 分析のまとめ

分析の結果, 3 つの活動を学習の流れに組み込むと, 時系列としては, まず問いを設定する活動があり, 次に具体化があり, 最後に拡張が行われる. それぞれの活動についてこの順で詳しく見る.

①問いを設定する活動について

数学第一類では, 乗数が正の数のときは考えられるものとし, 乗数が負の数のときについて考えていくことに問いを焦点化している. また, 林の事例においても, それぞれの数式の問題文を考えることで, 乗数が負の数の乗法について, 式の意味が捉えにくいことを明らかにしている. これらから, 問いを設定するためには, 負の数を含んだ乗法の意味を考える活動を行うことで, 乗数が正の数の場合の乗法と比較しつつ「乗数が負の数の乗法をどのように考えていったらよいか」という問いを設定していけると考える.

②抽象的なものを具体化して考える活動について

どちらの事例においても, 数式という抽象的なものを, 坂の場面・東西への移動に具体化している. 一方で, 具体的な場面は生徒自らが具体化したものではなく, 教師から提示されている. その理由として, 負の数の乗法に対応する具体的な場面では, 「そこに用いられている量が負の数も考えられるものでなければならない」(杉山, 1986, p 231) ことが挙げられる. よって, 生徒自らが選び出していくことが難しいと考えられる. しかし, 提示されているが, 林の事例においては, (いくつ分) にあたる量が負の数にまで拡張できればよいことに着目させている. この働きかけは, 具体的な場面は負の数までも表すことができるものが必要であることを生徒に対して示唆している. その結果, 負の数まで考えられるものを生徒から具体化することができなくても, 正負の数の乗法を考えていける具体的な場面であると認識することができていると考える. 以上より, 具体化して考えて

いく活動では、ただ与えられた具体的な場面で考えていくのではなく、どんな具体的な場面だと考えられそうかを生徒が一旦考える活動を取り入れることで、与えられたにしても「乗数が負の数の場合でも表せるような具体が必要だ」ということを認識していくことができると考える。

③わかっている事柄を基にその事柄における意味や形式を一般化してまとめていく活動について

数学第一類の場合は、「コノ増シタ高サヲ計算スルノニ、 x ガ負ノトキニモ、コノ式ガ使ヘレバ便利デアル。」と示唆したうえで、坂の場面を基にして -100 の時を考えている。また、林の場合は、 2×3 を表す東西への移動の文を基にして、どのように変えたらよいか考えている。これらの指導では、正の数の乗法の場合と正負の数の乗法の場合で何が変化したのかに焦点を当てている。ここから、一般化してまとめていく活動では、具体的な場面における正の数同士の乗法の意味を基にすることで、正負の数の乗法の意味を考えていくことができると考える。

(5) 学習の流れの3段階の構成

以上を基に、正負の数の乗法において拡張を行っていく学習の流れにおいて、少なくとも必要となる活動を3段階でまとめると、以下ようになる。

(第1段階) 負の数を含んだ乗法の意味について考えることで、「乗数が負の数の乗法をどのように考えていったらよいか」という問いを設定する。

(第2段階) 「正の数だけではなく負の数も表せる具体である」ことを認識しつつ、具体化する。

(第3段階) 具体的な場面における乗数が正の数の場合の乗法を基に、乗数が負の数の場合の乗法を取り決める。

先行研究や事例を基にして、正負の数の乗法において生徒が拡張を行っていけるための学習の流れについて3段階でまとめた。この3段階を基にして、正負の数の乗法における拡張を生徒が行うとき、用いる具体的な場面によって生徒の学習活動に違いがあるのか分析する。

4. 具体的な場面による生徒の学習活動の違いの分析

学習の流れにおける第2段階・第3段階で用いられる具体的な場面によって学習活動にどのような違いがあるのかについて分析する。そのためにこの章では、「坂の場面」「東西への移動」「トランプゲーム」の3つの

対象となる具体的な場面と数式との関連付けをまとめたうえで、定めた観点を基にして比較分析を行う。

(1) 具体的な場面の概観

まず、「坂の場面」「東西への移動」「トランプゲーム」のそれぞれについて、数式との関連付けをまとめる。

①坂の場面

正の数の乗法について次のように置き換えられる。

東西に走る坂道がある。その勾配は水平距離 1m について 0.2m の割合で東が高くなっている。
水平方向東に 5m 進んだとき、基準点からの高さは、小学校で学習した拡大・縮小の考えを基に、 $0.2\text{m} \times 5 = 1\text{m}$ で求めることができる。(図2)

この時の $0.2\text{m} \times 5 = 1\text{m}$ は、図2のように表されるが、考え方は図3のような、三角形の拡大・縮小が

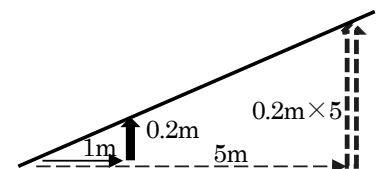
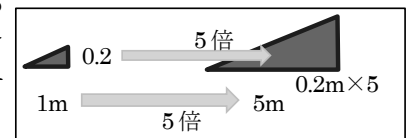


図2: $0.2\text{m} \times 5$ を表す坂の場面

基になっている。つまり、相似な三角形において、底辺が5倍されているので高さも5倍されていると考えている。



この具体的な場面をもとにした場合、 $0.2 \times (-5)$ のような、乗数が負の数の乗法の積は、次のようにして考えられる。

東西に走る坂道がある。その勾配は水平距離 1m について 0.2m の割合で東が高くなっている。
水平方向東に $(-5)\text{m}$ (西に 5m) 進んだとき、基準点からの高さは、 $0.2\text{m} \times (-5) = (-1)\text{m}$ で求めることができる。

乗数が正の数の乗法の時には、水平方向 1m あたりに 0.2m 東が高くなる坂で考えたときの、水平方向東に 5m 進んだときの高さとして $0.2\text{m} \times 5$ と表していた。乗数が負の数のときにも、水平方向 1m あたりに 0.2m 東が高くなる坂をもとにして考える。乗数が正の数のときには水平距離東に 5m として考えていたので、乗数が負の数のときには、水

平方方向東に $(-5)\text{m}$ 進んだ時の高さと考えてることができる。すると、図4のようになる。

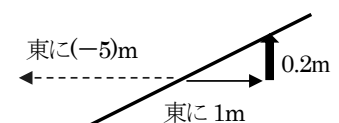
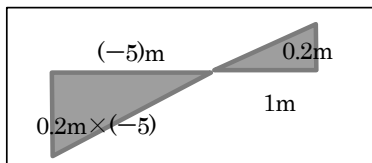


図4: $0.2\text{m} \times (-5)$ を考える場面

この時、再び三角形の拡大・縮小をもとにし、さらに乗数が正の数の場合と比較して考えると、図5のようになる。

この時、高さを表す式として、 $0.2\text{m} \times (-5)$ と表すこ



とができる。このと 図5: 拡大・縮小の関係にある三角形

きの高さは、基準から上向きのプラスに対して今回は基準から下向きのマイナスと捉えることができる。すると、上向きの+1mに対して、下向きを(-1)mと考えられる。結果、 $0.2\text{m} \times (-5) = (-1)\text{m}$ と考える

図6: $0.2\text{m} \times (-5)$ を表す坂の場面

ことができる(図6)。また、図6における高さを表す矢印は下向きで記述することになる。

②東西への移動

正の数同士の乗法は次のように置き換えられる。

ひろし君は、時速2kmで西から東に進んでいる。現在0地点を通っている。
3時間後にいる地点は、 $2\text{km/h} \times 3\text{h} = 6\text{km}$ で求めることができる。(図7)

東西への移動を基

にした場合、 $2 \times (-$

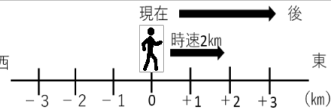


図7: 東西への移動の場面

負の数の乗法の積は、次のようにして考えられる。

ひろし君は、時速2kmで西から東に進んでいる。現在0地点を通っている。
3時間前にいる地点は、 $2\text{km/h} \times (-3)\text{h} = (-6)\text{km}$ で求めることができる。

乗数が正の数の乗法の時には、時速2kmで進んでいるひろし君が2時間後にいる地点として(速さ) \times (時間) = (距離)の速さの方式をもとに、 $2\text{km/h} \times 3\text{h} = 6\text{km}$ と考えていた。これをもとにして乗数が負の数の場合を考える。乗数が正の数のときには、3時間後とを考えていた。そのため乗数が負の数のときには、3時間前と考えることができる。すると、時速2kmで西から東に進んでいるとき、現在から3時間前には、 $2\text{km/h} \times (-3)\text{時間} = (-6)\text{km}$ と式を立てることができ、東に(-6)kmの地点にいたことになる。

③トランプゲームの場合

正の数同士の乗法は次のように置き換えられる。

黒の2のカードを3枚もらったとき、手元の点数の現在の点数からの増減は、 $2\text{点} \times 3\text{枚} = 6\text{点}$ で求めることができる。(図8)

トランプゲームを基

にした場合、 $2 \times (-3)$ のような、乗数が負の数の乗法の積は、次のようにして考えられる。

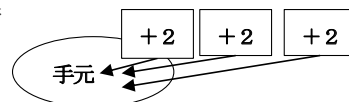


図8: 2点 \times 3枚を表す図

黒の2のカードを3枚とられるとき、手元の点数の現在の点数からの増減は、 $2\text{点} \times (-3)\text{枚} = (-6)\text{点}$ で求めることができる。

乗数が正の数の乗法

の時には、黒の2のカードを3枚もらっ

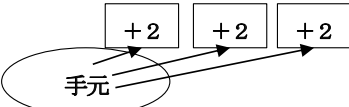


図9: 2点 \times (-3)枚を表す図

たとき、手元の点数の現在の点数からの増減は、 $2\text{点} \times 3\text{枚} = 6\text{点}$ であると考えていた。これをもとにして乗数が負の数の場合を考える。乗数が正の時には3枚もらうことであると考えていた。よって負の数の場合を考えるときには、3枚とられると考えることができる。すると、現在の点数からの増減を考えたとき、黒の2のカードを3枚とられたことは $2\text{点} \times (-3)\text{枚}$ と式を立てることができる。よって、得点が6点減る、すなわち、(-6)点増えることになる。

(2) 観点をもとにした具体的な場面の分析

3つの観点をもとにして順に分析する。

観点①: どのような活動により拡張を考えていくか

・坂の場面

場面を表す坂の図に直接矢印を書き込んで、視覚的に高さを考えていく活動により拡張を考えている。 0.2×5 のときには「水平方向東に5m進んだ時の高さ」だったことをもとにすると、今回は「水平方向東に(-5)m進んだ時の高さ」となる。この高さを直接図に書きこんで考えてみると、水平方向東に(-5)mの矢印を取った後に、高さは下向きの矢印になることが分かる。このようにして、 $0.2 \times (-5) = (-1)$ であると考えていくことができる。以上より、坂の場面では、図に直接書き込んで視覚的に考える活動がある。

・東西への移動

図を基にして、どの地点にいるかを、人を動かして考

えたり、直接書き込んで考えたりする活動により拡張を考えている。ただし、「3時間前」を考えると、図に記入して考えようとするとうどう記述したらよいか捉えづらい。そのため、乗法を視覚的に捉えられるというよりはむしろ、操作の活動を通して考えている。

・トランプゲーム

トランプゲームという操作を通して、「もらう」に対する「とられる」を考えていく活動により、拡張を考えている。以上より、トランプゲームでは、ゲームによる操作を基にして考える活動がある。

観点②：正負の数の乗法における3項以上の積をどのように考えていくか

続いて、3項以上の積へつなげていけるかについて考える。池田によれば、 $(-70) \times (-2) \times (+2)$ のような3項以上の乗法を考えると、「速さ \times 時間＝距離」などのような乗数が量の場合には、意味付けが難しく、乗数を何倍といった割合の意味で解釈できる場面を取り上げる必要があるとしている（池田，2017）。ここから、3項以上の積を考えるとときには、乗数を割合として捉えていく必要があることが分かる。したがって、乗数が何を表しているのかに着目することによって分析する。

・坂の場面

0.2×5 の意味は、図3のような、小学校6年生で学習する三角形の拡大・縮小を基にして考えると、2つの三角形の底辺と高さの辺の比がそれぞれ等しいことから、 $0.2\text{m} \times 5$ と考えられる。つまり、乗数の5は、元の高さ 0.2m に対して、水平方向東に 5m 進んだ時の高さが、 0.2m の5倍であるという割合を表している。乗数を割合で捉えることによって、3項目以降の数も何倍として捉えることができ、同一の坂の場面で考えていくことが可能である。例えば、 $0.2 \times 5 \times 2$ のような乗法を考える際には、 $0.2\text{m} \times 5 \times 2$ と考え、図10のようにして考えられる。 0.2×5 を考えるときに、乗数の5が水平方向東に 5m の5を表していると捉えると意味が捉えにくくなる。しかし、三角形の拡大・縮小をもとに割合としての5と捉えることで、同一の坂の場面で3項以上の積を捉えることが可能になる。

・東西への移動

2×3 の意味は、(速さ) \times (時間) = (距離) の速さの公式として捉えられ、乗数は時間という量として捉えている。この考えのもと $2 \times 3 \times 5$ のような3項以

上の積を考えると、

3項目の乗数5はど

う解釈できるか。池

田は、この5を時間

と想定したとき、「被

乗数が速さだから

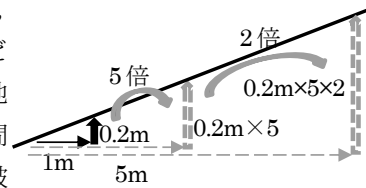


図10： $0.2\text{m} \times 2 \times 5$ 表す図

こそ、時間をかけて距離になったわけであって、その距離に時間をかけることはナンセンスである」（池田，2017，p373）と述べている。そのため、3項以上の積を同一の具体的な場面で捉えるには、時間と距離の「時間がa倍だから距離もa倍」という比例関係を基にした捉えに再構成する必要がある。

・トランプゲーム

2×3 の意味は、2点 \times 3枚＝6点である。この時乗数は、枚数という量として捉えられている。そのため、トランプゲームの場合にも、東西への移動の場面と同様に「枚数がa倍だから点数もa倍」という比例関係を基にした捉えに再構成する必要がある。

観点③：高校数学におけるベクトルの実数倍へどのようにつなげて考えていけるか

ベクトルの実数倍の学習では、向きと大きさによって定まるベクトルを実数倍することを考える。この学習へとつなげていくためには、数をベクトルとして捉えられること、乗数を何倍という割合として捉えられることが必要である。

・坂の場面

被乗数である高さを表すとき、上向きか下向きか区別するために、ベクトルが用いられる。このベクトルに対して、実数倍がされていくと捉えられる。よって、ベクトルの実数倍へと拡張していける可能性がある。

・東西への移動

被乗数である速さは、「西から東に 2km/h 」や「東から西に 2km/h 」など、向きと大きさを考えて、ベクトルで表すことができる。しかし、先にも述べたように、乗数を割合として捉えられていないため、実数倍の考えに繋げるためには、比例関係を基にした捉えに再構成する必要がある。

・トランプゲーム

被乗数がトランプの点数である。拡張について考える活動は、ゲームのような操作であり、図に表す必要性がないため、点数に対して向きがあることに着目しづらい。

(3) 分析のまとめ

分析によって明らかになったそれぞれの特徴を表にまとめると、以下ようになる。

表2 具体的な場面の分析結果

	坂の場面	東西への移動	トランプゲーム
観点①	視覚的に考える	操作的に考える	操作的に考える
観点②	そのままの捉えで考えられる	比例関係を基にした捉えに再構成	比例関係を基にした捉えに再構成
観点③	繋げていける	再構成により繋げていける	繋げていくことは難しい

5. まとめ

本研究の目的は、「正負の数の乗法において、生徒が拡張を行っていく学習の流れについて明らかにするとともに、その学習の流れにおいて用いる具体的な場面によって、生徒の学習活動に違いがあるのか分析を行うこと」であった。

まず学習の流れについては、問いを設定する・具体化する・拡張するといった3つの活動が少なくとも必要であり、また、その活動を基にして正負の数の乗法の拡張における学習の流れを段階ごとにまとめることができた。

具体的な場面について、観点①の拡張を考えていく活動については、坂の場面では視覚的に表すことで拡張を考え、東西への移動とトランプゲームは操作によって拡張を考えることが分かった。以上より、拡張を考える際の学習活動の違いとして、視覚的に考えるのか、操作を通して考えるのかに違いがあることが分かった。

観点②の、3項以上の積について、坂の場面は乗数を割合として捉えているため、同一の場面でそのまま考えていけることが分かった。東西への移動とトランプゲームの場合、比例関係を基にした捉えに再構成する必要があることが分かった。以上より、3項以上の積を考える学習活動では、2項の積を考えていた具体的な場面をそのまま用いるか、比例関係を基にした捉えに再構成する必要があるのかに違いがあることが分かった。

観点③の、ベクトルの実数倍については、坂の場面では高さを表すベクトルが実数倍によって変化することを視覚的に捉えられることが分かった。東西への移動の場合は数直線上にベクトルは表されるものの、実数倍の考えに繋げるためには、比例関係を基にした捉えに再構成する必要があることが分かった。以上より、ベクトルの実数倍を正負の数の乗法をもとにして考える際の学習活動では、正負の数の乗法で用いていた具体的な場面をそのまま用いることができるか、捉え直す必要があるかに違いがあることが分かった。

今後の課題は、具体的な場面それぞれの長一短があることが分かったため、それぞれの具体的な場面の良さを活かしていくために、複数の具体的な場面を用いていくような指導を考えていくことである。

参考・引用文献

- 林順一 (1993).『『個を生かす』指導の試み』, 数学教育, 明治図書, pp.86 - 93.
- 一松信他 (2015). 中学校数学1, 学校図書.
- 池田敏和 (2017). モデルを志向した数学教育の展開—「応用志向 vs 構造志向」を超えて—, 東洋館出版社.
- 彌永昌吉 (2008). 数学のまなび方, 筑摩書房.
- 神林信之 (2000).『『正の数・負の数』の乗法—知識の再体系化を目指す教材構成—』, 数学教育, 明治図書, pp.30 - 33.
- 香西雅斗 (1995).「重りと風船を使った正負の数の概念の指導」, CRECER 中学校数学科教育実践講座第2巻 - 数 -, 日本文教社, pp.63 - 69.
- 片桐重男 (1995). 数学的な考え方を育てるねらいと評価, 明治図書.
- 古藤怜 (1991). 算数・数学科における Do Math の指導, 東洋館出版社.
- 中島健三 (2015). 復刻版 算数・数学教育と数学的な考え方—その進展のための考察—, 東洋館出版社.
- 竹下知行 (2012).「正の数・負の数の計算法則を考える場面」, 数学教育, 明治図書, pp.16 - 19.
- 中等学校教科書株式会社 (1943). 数学 中学校用1 第1類.
- 山下佳伸 (1990).「課題に対する追究力を高める指導」, 数学教育, 明治図書, pp.21 - 28.