微分・積分の逆関係を捉えるための指導に関する考察
～「數學　第一類」の教科書の分析を通して～

横浜国立大学　教育学研究科　教育実践専攻　数学専門領域
阿部　右京

１．はじめに

（1）問題意識の明確化

教育課程企画特別部会の「論点整理」の中で，教育の在り方について「解き方があらかじめ定まった問題を効率的に解ける力」だけではなく，「自ら問いを立ててその解決を目指」すことが重要であるとされている．

しかし，教育課程高等学校数学科「数学Ⅱ」における微分・積分法の指導において，杉山ら (1999) の「やさしくすることに力を入れすぎ，魅力ある部分，肝心な精神が失われてしまっている」，塚原（2002）の「簡素化されているがために，技能の習熟と知識の伝達に陥り，かえって,微分積分法の意味が分かりにくくなっている」などの指摘があるように，問題を解決していく過程より数式の計算技能を重視する傾向があることが課題として挙げられている．特に，積分の導入指導は微分の逆計算として不定積分を求めることから扱われ，計算結果から帰納的に積分の公式として用いている．しかし，そのような指導の中では，なぜ微分と積分が逆関係にあるのかが捉えがたく,その逆関係についても言及されていない．

以上のことから，生徒自らが微分・積分を用いて数学的な問題を解決していくためには微分・積分の逆関係を捉えることが必要であると考え，そのための指導について,「事象ニ郎シテ生徒自ラ數理ヲ發見スルヨウニ導クコト」を精神とする「數學　第一類」の教科書の分析を通して考察を行う．

（2）研究目的と方法の設定

本研究の目的を「數學　第一類」の教科書における取り扱いの分析を通して微分・積分の逆関係を捉えるための指導についての示唆を得ることと設定し，以下の方法で研究を行う．

①微分・積分指導における本研究の立ち位置を定め，逆関係を捉えるための指導について考察し，分析対象と分析の視点を設定する．
②本研究で分析対象とした「數學　第一類」の教科書の背景や理念，指導の方針を明らかにする．
③「數學　第一類」の教科書での微分・積分の取り扱いを①で定めた視点から分析し，その価値と課題について考察する．

２．本研究における微分・積分指導に対する見地

（1）具体・抽象の２つの世界について

池田 (2017) は数学教育を考える上で「現実の世界の問題を解決することを目的」とした「応用指向」と「数学の世界を豊かにすること自体を目的」とした「構造指向」の２つの立場があることを示したうえで，両者の統合を目指す立場をとっている．その立場から両者に共通していることとして「目的はある一つの世界で生じ，物事の仕組み（構造）を明らかにする目的の基で，もう一つの世界にあるモデルを活用して目的を達成」している点があるとし,「両方向の活動が共に影響を与えることによって，現実の世界，数学の世界が共に成長していくと共に，二つの世界を繋ぐ関係自体も成長していく」と述べている．言い換えると，指導の際には現実の世界と数学の世界のどちらから考えるにしても，目的を設定する必要があり，目的達成のプロセスとして，具体と抽象の関係を持った２つの世界を行き来する必要性があると言える．

上記の視点に基づき,現行の「数学Ⅱ」の指導をみると,多くの場合，微分の導入は「瞬間の速さ」を求めるという現実の世界から生じた目的の上で,（平均の速さ）=（移動距離）÷（時間）で求められるという既習の数学の世界の知識を基に，a 秒後から b 秒後までの平均の速さを数学の世界から平均変化率の式で表すことから始まる．その後，a 秒後と b 秒後の間隔を短くしていき，時間の間隔を０に近づけることから現実の世界で「瞬間の速さ」の求め方，概念を考え，２つの世界を行き来し，理解を深めていると言える．

対して，多くの積分の指導では，「関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数」として不定積分から導入される．言い換えると，積分の導入の際には，抽象化された微分の考えを基にその逆として積分が導出されたものであると言える．この導出方法自体は，数学という教科を抽象化が繰り返されていくものであると捉え，より抽象化された世界を考える上での新たな具体として設定したとき，妥当性を持つように思える．しかし，このような捉えの中でも，現実場面，より抽象化された世界のいずれにも積分を考える目的が明確に設定されていないことは問題としてあげられる．また，目的の一つと成り得る内容として，面積を求めることが「数学Ⅱ　積分の考え」ではあるが，定積分の応用としての取り扱いであり，積分を捉える際には活用されていないと言える．

以上のことから，微分の指導においては現実の世界と数学の世界の具体と抽象を行き来することから学習を深めていくことができているが，積分の指導においては積分を考える目的を設定し，抽象と具体を行き来するような指導を行う余地が残されていると考えられる．

（2）積分を指導する順序について

積分指導の順序としては，現行の指導と同様に微分の逆として導入し，なぜ逆を考えるのか目的を与える方法と現実の世界の問題として面積を求めることを目的とする２つの指導が考えられる．本研究では２つのうち，積分を面積から導入し，微分・積分をそれぞれ学んだ後にそれぞれの逆関係を捉えていく立場にたつ．

その理由として，現実の世界に目的を設定しやすいことの他に，別々のアプローチを行っていた微分と積分の間に逆関係があることを発見することを体験し，そのよさを知ることができる点がある．塚原 (2002) が「歴史的にみれば，求積法として発達した積分が，接線法や瞬間速度と関わって発達した微分の逆であるという事実の認識と定式化は，画期的な出来事である」と示しているように歴史上でも微分・積分が逆関係にあることは大きな発見であり，指導を行う上でも重要視するべき内容であると考える．また，杉山ら (1999) も微分・積分の数式の計算技能について「必要以上に偏重されている傾向は否めない」としつつも，「軽視しすぎる人たちが多いのも困った問題で，数式の計算技能の充実が可能にする数学的豊かさの展開にもっと目を向けるべきである」と微分積分学の基本定理の持つ数学の世界でのよさにも目を向けている．

しかし，前述の塚原の「画期的」という言葉の中には逆関係であることは多くの人にとって想像しがたいことのニュアンスを含んでいるように，このことの教材化については「『導関数 $f(x)$ に対して，もとの関数 $F(x)$ が何であるかに関心をもつのは自然であり，……』と言い切るためには十分な吟味が必要」であると述べ，微分と積分の逆関係を生徒が感得するためには教材開発の工夫が必要であるとしている．

以上のことから，微分・積分の逆関係を捉えるためには生徒自らこれを導く経験が必要であると考えられ，そのために有効な教材についての検討が重要である．

（3）微分・積分の逆関係を捉えることについて

前節までの内容を受けて，微分･積分の学習を通して，生徒が微分積分学の基本定理を理解することを指導において重視することの１つと位置づける．この時，微分・積分を単なる数式の逆算関係と捉え，単純な計算技能として代数的に利用できるようになるだけではなく，関数的，幾何的な方向からも多面的にこの定理，関係性を捉えることが重要となる．以上の点を踏まえ，「逆関係を捉えること」を次の２点を満たすこととして規定する．

①　微分・積分の持つ逆演算の関係を理解すること
②　変数の変化による対応を相互につけられること

この定義から，必然的に微分・積分の逆関係を捉えるための指導では，微分，及び積分で扱う教材は相互に関連させて捉えられるものであることが重要となる．

以上のことから，微分・積分の逆関係を捉えるための指導に関して肝要と考えられることに少なくとも以下の３点があげられる．この３点を満たす指導を本研究における微分・積分の逆関係を捉えるために目指すべき指導の視点として設定する．

①積分の導入は微分の逆としてではなく求積から行われること．

②微分・積分の逆関係を発見できるよう，教材として相互に関連したものが扱われていること．

③微分・積分ともに目的の設定と現実場面と数式の具体と抽象を行き来する過程があること．

３．微分・積分の逆関係を捉えるための指導について

（1）積分法の歴史的発展について

前章で少し触れた歴史的発展について，小平 (1986) は「数学の教育は，数学の歴史的発展の順序に従って行うべきであると思う．（中略）この順序を逆にして，歴

史的に遅く現れた分野を子供に教えようとすれば，その分野の本質的な部分は子供に理解できないので，結局非本質的なつまらない部分を教えることになる」と，数学の指導においての見解を述べている．そこで，本節では積分の歴史的発展をみていく．

積分の考え方の始まりとして，紀元前 300 ～ 0 年に古代ギリシャの数学者であるアルキメデスによる「取りつくし法」があげられる．これは，曲線（および曲面）で囲まれた特定の領域の面積（および体積）を求めるための手法で，面積を求める際，次々と三角形で取りつくしていくという幾何的な発生である．これを用いて，円の面積を「円に内接する正方形からはじめて内接多角形の辺数を次々倍加していくことを絶えず繰り返していった時，ある量より小さい円の切片が残る」といった方法（図１）で正 96 角形を作って面積を近似した．

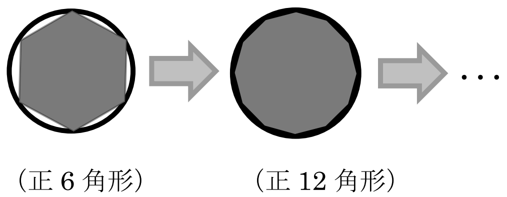

図１．取りつくし法

また，「取りつくし法」は 1600 年代までは面積を求める主な手法として用いられ，それまでは積分学の発展はあまり見られなかった．その後，ライプニッツ等によって微分積分学の基本定理「区間上の連続関数 $f(t)$ に対し，$F(t)$ の導関数が $f(t)$ のとき，$F(t)$ を $f(t)$ の原始関数と呼ぶ」に代表されるように微分と積分が統一的に考えられることが明らかになったのは 1600 年代であった．

（２）微分・積分の指導例と研究の方向性について

現行の指導の中で，積分の考え方の素地となる内容として小学校第５学年の「図形の面積」，小学校第６学年の「円の面積」の単元がある．第５学年では「およその面積」を求める方法として方眼紙を用いて，第６学年では円の面積を同様に方眼紙を用いて近似する方法と，円の中に正多角形を書いて既知の図形を用いて近似する方法の２つが扱われている．これらは積分の単元で区分求積法を扱う上で既知の図形で近似していく中で素地的な考え方としての役割を果たすと考えられる．

先行研究としても，区分求積法に代表される求積法として幾何的アプローチから積分の導入が行われている実践例は数多く報告されている．しかし，それらの実践の中で扱われている内容としては幾何的な側面としての定積分の意味の理解，または極限の概念の導入に留まっており，幾何的アプローチからの積分の導入が微分の指導と関連づけられ，微分・積分の逆関係を捉えることに与える影響について述べられているものは見られなかった．

このことから，微分・積分の逆関係を捉えるための指導の具体化に向けて，微分の導入，積分の導入，微分積分学の基本定理が導出される過程のすべてに焦点を当てて考察を行う必要があると考えられる．そこで，本研究では過去に使用されていた教科書を分析することから，微分・積分の逆関係を捉えるための指導の具体化に向けての示唆を得る．

４．分析対象と分析の視点の設定

（１）分析対象の設定

分析の対象とする条件として，①「積分の導入は微分の逆としてではなく求積から行われること」が満たされているものとし，①を満たす戦時中の教科書である「數學　第一類」の教科書を分析対象として設定する．

（２）分析の視点の設定

分析の視点として，前章で定めた②「微分・積分の逆関係を発見できるよう，教材として相互に関連したものが扱われていること」，③「微分・積分ともに現実場面と数式の具体と抽象を行き来する過程があること」が充分になされているかどうかを分析の視点として設定し，そのことが逆関係を捉えるために果たしている役割について考察する．

５．「數學　第一類」の理念や編纂などの特徴について

昭和 18 年に「數學　第二類」とともに発行された「數學　第一類」は，昭和 17 年に数学教育の目的を「直觀ト推理トヲ一體トシテ數理ヲ追究スルノ能力ヲ錬磨」することとして教授要目の精神に基づき編纂されている．

本章では，「數學　第一類」が編纂された時代背景や，教科書発行までの流れ，及び，「數學　第一類」の教科書の理念や特徴を明らかにしていく．

（1）「數學　第一類」編纂の背景について

昭和 10 年から小学校で使用されていた「尋常小学算術」（緑表紙教科書）は数理思想の開発という編纂趣旨を受けて，作問を重視するなど当時の教科書の中では斬新な学習材が数多く導入された．昭和 16 年にはこの教科書で学んだ子どもたちが，中等学校へ進学することになっていたが，中等学校で採用されている教科書は旧制度のままであり，小学校と中等学校との隔たりを埋める必要があった．

このような状況を受けて，昭和 13 年から昭和 14 年に中等数学教育では，実用を重視すること，数学を総合的に扱うこと，微積分の概念を導入することなどが議論された．それらの議論を受け，昭和 17 年には「數學教授要目」が改正された．翌昭和 18 年には教授要目の精神に則った「數學　第一類」,「數學　第二類」の教科書が発行された．

（2）「數學　第一類」編纂の理念や特徴について

「數學　第一類」の特徴として,「問題中心主義」の立場をとっており，定理や公式などは教科書に記載されていないことがあげられる．これは,「未發ノ眞理ヲ追究スル能力ノ錬磨コソ最モ肝要デアル．コノ故ニ，既成ノ數學ヲ注入スル教育ヲ排シ，生徒自ラ事象ニ即シテ數理ヲ發見スルノ修練ヲ必要トスル」と学校数学を具体事象との関連で捉えようとし，予習などをした生徒の考究を妨げないようにした結果である．

また,「事象ノ數學的解釋ニハ，函數觀念ガ核心トナルコトハイフマデモナイ」と関数の重要性について説き,「函數關係ヲ把握スルニハ，圖表ニヨツテ直觀的ニ掴ムノヲ捷徑トスル」とされている．その理由として,「式ニヨツテコレヲ表ハス場合ニ於テモ，數値關係マタハ圖表ニヨル裏付ナクシテ確實ニ把握スルコトハデキナイ．圖表ヲ重視スル理由ハココニ在ル」と,関数の中でも「圖表」による裏付けによる把握を重視している．

以上のことから,「數學　第一類」の教科書では，グラフによって現実の世界の問題を捉えることが重視され，数学の世界への抽象化する過程を重視して編纂されたことがわかる．

6．「數學　第一類」の微分・積分の取り扱いについて

「數學　第一類」の教科書で微分・積分が扱われているのは第 4 学年である．本章では，教科書の章・節の構成に着目しつつ，第 4 学年でどのように微分・積分が扱われているか明らかにする．

（1）「數學　第一類」における微分・積分の位置づけ

「數學　第一類」で微分・積分は第 4 学年で取り扱われている．第4学年の教科書は以下の３つの章から成る．

1．系列ノ考察
2．連續的變化
3．統計ト確率

この３つの章の中で微分・積分に関連する内容は第 1 章「系列ノ考察」, 第２章「連續的變化」で取り扱われているため，この２つの章に焦点を当てて章の流れを追っていく．

（2）第１章「系列ノ考察」の構成

第１章は表１のように構成され，目的は「極限觀念ノ導入ニ在ル」とされている．それに続けて「極限ニツイテハ，誤ツタ觀念ヲ抱キ易ク，誤レル先入ハ後々ノ理會ノタメニ少ナカラザル障碍トナル」と，極限が誤った概念を抱きやすいことを問題としてあげている．

表１．系列ノ考察

§１．區分求積[1]	實用的ナ求積問題デ技術的ニ精度ヲ高メテイクコトヲ考究スル
§２．區分求積[2]	數學的ナ求積問題ニ轉ジ，理論的ナ精度ヲ高メルコトヲ考ヘ，極限觀念ノ一歩手前マデ進ム
§３．數列	以上（§4,5）ノ主張ニ附隨シテ，數列ノ和ノ考察ガアル
§４．極限	極限ハ，數列・接線・函數ナド種々ノ形態デ取扱ハレル．先ニ述ベタ如ク，コノ邊ノ指導ヲ誤ラヌヤウニ留意サレタイ
§５．等比數列	等比數列ニ關係シテ無限數列ノ和ノ概念ヲ導入シ，無限數列ノ和ハ，有ル場合モアリ，マタ無イ場合モアルコトヲ明ラカニスル
§６．無限小數	無限數列ノ一ツトシテ無限小數ニツイテ考察スルガ，問題ハ總ベテ整數ノ性質ノ考究ニ歸スル

（3）第２章「連續的變化」の構成

第２章は表２のように構成され，眼目は「增加率ト和ノ極限トノ意義並ビニコレラヲ求メル演算トノ關聯ヲ十分ニ理會サセ，微分ト積分ノ核心ヲ捉ヘサセルニ在ル」とされている．続けて「コノタメニハ，新概念ト新記號ノ消化ガ必要デアルカラ，要所ノ鍛錬ニカメ，堅實ナ進

行ヲ圖ラナケレバナラヌ」と，一つひとつの概念の理解をしつつ進めなければならないことを示している．

表２．連續的變化

§１．速サト距離	運動ニ於ケル各瞬間ノ速サノ觀念ヲ確立シ，速サト進行距離トノ關係ヲ明確ニスル
§２．速サト距離ノ圖表	函數トシテノ速サト距離ノ觀念ヲ導入スル
§３．微分	微分ト積分ノ形式的ナ演算ヲ考究シ，應用ノ一端ニ觸レル
§４．積分	
§５．增加率・和ノ極限	中核ヲナス增加率ト和ノ極限ノ廣汎ナ用途ヲ悟ル
§６．抛物線ニヨル近似	高イ見地ニ立チ，再ビ近似求積ノ問題ヲ取リ上ゲル
§７．近似式・誤差	函數關係ノ發見ガ要點デアル
§８．種々ノ函數ノ微分ト積分	形式的演算ノ補足

（４）本研究で分析を行う節について

本研究では，微分･積分に関連する章の中で第１章「系列ノ考察」の「§１．区分求積 [1]」「§２．區分求積 [2]」，第２章「連續的變化」の「§１．速サト距離」，「§２．速サト距離ノ圖表」「§３．微分」「§４．積分」の微分･積分学の基本定理が導出される節までを，②「微分・積分の逆関係を発見できるよう，教材として相互に関連したものが扱われていること」③「微分・積分ともに現実場面と数式の具体と抽象を行き来する過程があること」に着目しながら分析の範囲として扱う．

７．「數學　第一類」における「問」の展開とその分析

（１）分析内容の設定

「數學　第一類」の教科書の各節に共通する構成として，長崎 (1991) は「この教科書の記述は，導入，問，作業，定義，問題（演習問題）の５つの部分に大きく分けられる」としている．その中で「問」を「導入で問題提起をし，一連の問によってその課題を解決していく中で，新しい数学を学ばせようとしているのである」と，数学を習得するための内容として位置付けている．

そこで，本研究ではこの「問」を分析内容とし，特にグラフ上での活動がどのようになされ，どのような働きをしているかに着目する．

（２）第１章「§１．區分求積 [1]」,「§２．區分求積 [2]」の「問」の展開

「§１．區分求積 [1]」の内容は「實用的ナ求積問題デ技術的ニ精度ヲ高メテイクコトヲ考究スル」こと，「§１．區分求積 [2]」は「數學的ナ求積問題ニ轉ジ，理論的ナ精度ヲ高メルコトヲ考ヘ，極限觀念ノ一歩手前マデ進ム」ことであった．

「§１．區分求積 [1]」は３つの「問」から成り「不規則ナ圖形ノ面積ヤ體積ノ求メ方ヲ考究シヨウ」といった導入から始まり，数学の世界における見通しを立てる．そこから,「右（図２）ノ地圖ノウチ , 正方形デ示シタ部分ヲ或ル高サニ均シテ , 土ノ過不足ヲナルベク少ナクシタイトイフトキ , ドノヨウニシテ , ソノ高サヲ算出シタラヨイデアラウカ」と現実の世界での課題が提示され,「問」へと移る．

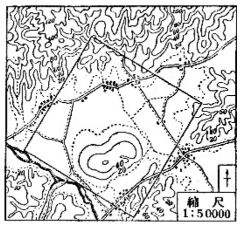

図２

問１では図３が提示され,「圖形ノ面積ヲ求メル方法ヲ考ヘヨ」と最初に示された課題に取り組み，問２で図４によって面積を求める方法について「ドノヨウナ方法デアルカ考ヘヨ．マタ , コノ方法デ面積ヲナルベク精シク測ルニハ , ドノヨウニスレバヨイカ」と求積法の精度を上げるための考察から無限に対する理解の素地となる活動を行っている．続いて，問３で「次ノ圖船（図５）ノ吃水線ヲ通ル平面デ船ヲ切ツタ切口ヲ示ス．對稱軸ヲ 10 等分シ , 各分點 1,2,3,…,8,9 デ軸ニ垂線ヲ立テ , 吃水線マデノ長サヲ $y_1,y_2,y_3,\cdots\cdots,y_8,y_9$ トスル．對稱軸ノ長サ a 及ビ $y=_1,y_2,y_3,\cdots\cdots,y_8,y_9$ ヲ用ヒテ , 上ノ斷面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ」と前問までに取り組んできた考え方を使って実際に近似した面積の値を求めている．

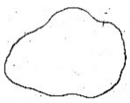

図３

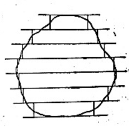

図４

これらの問では積分に対する幾何的アプローチの方法の１つとなる区分求積法を現実の世界で扱っている．「數學　第一類」のこの節における特徴として，区分求積法を１つの独立した内容として扱っている点があげられる．

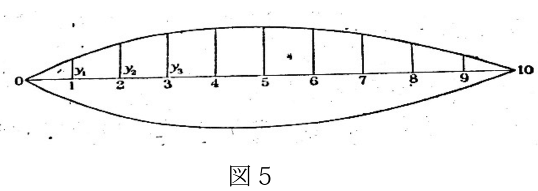

図５

「§ 2．區分求積 [2]」は４つの「問」から成り，図６とともに「放物線ト $y=x^2$ ト ,x 軸上ノ點 A ヲ通ツテ y 軸ニ平行ナ直線トノ交點ヲ B トスル．コノトキニ出來ル圖形 OAB ノ面積ハドノヤウナ式デ表ハサレルカヲシラベヨウ」といった問題提起から，「前節デ考エタ不規則ナ曲線デ圍マレタ圖形ノ面積ヲ求メル方法ヲ適用シテミヨウ」と第１節で用いた求積の考え方をグラフに適用することから始まる．

問１では「OA ノ長サヲ a デ表ハシ , コレヲ 10 等分スル各分點及ビ A ニ於ケル y ノ値ヲ順ニ $y_1,y_2,y_3,\cdots,y_9,y_{10}$デ表ハス．$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_9,y_{10}$及ビ a ヲ用ヒテ OAB ノ面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ」と前節で

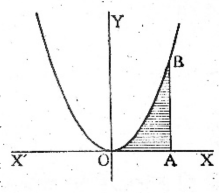

図６

現実の世界の事象に適応させた考えを問題のグラフで同じ考えの基で出来ることを確認し，問２ではその近似式として「$\frac{a}{10}(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_9+y_{10})$」から導かれる近似した値について「ソノ誤差ハドレ程デアルカヲ圖ノ上デシラベ」ている．このようなグラフ上での活動を行った上で，問２の最後で「OA ノ等分數ヲ多クスルト , ソノ誤差ハドノヤウニ變ハルカヲシラベヨ」とより正確な値を求める方法について問題提起を行い，問３で「誤差ガ 0.01 ヨリ小サクナルヤウニスルニハ ,OA ヲ何等分スレバ十分デアルカヲシラベヨ」と実際に誤差が小さくなることを確認している．さらに問４で「直圓錐（図７）ノ高サヲ a, 底面ノ半徑ヲ b トスル．高サ AB ヲ n 等分シ , ソノ分點 $C_1,C_2,C_3,\cdots\cdots,C_{n-1}$ ヲ通ツテ底面ニ平行ナ平面デコノ直圓錐ヲ切ル」と立体でもこの方法が使えることが示されている．

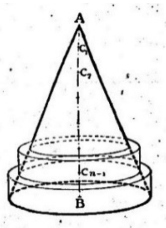

図７

このことから分かるように，区分求積法の独立した内容の中でも現実の世界の課題をグラフへと抽象化し，グラフの考察から数式化までを行う過程が行われている．

これらの２節を通して，面積を近似して求める方法と，それをより精度高く求める方法が扱われ，積分を幾何的に捉える上での考察方法の獲得を図っていると言える．

（３）第２章「§ １．速サト距離」の「問」の展開

「§ １．速サト距離」の内容は「運動ニ於ケル各瞬間ノ速サノ觀念ヲ確立シ，速サト進行距離トノ關係ヲ明確ニスル」ことであり，微分・積分の導入の役割を果たしている．

「§ １．速サト距離」は７つの「問」から成り ,「例ヘバ , 列車ガ走ルトキ , ソノ速サハ一様デハナク , 時々刻々ニ變化スル．コノヤウナ運動ニ於ケル各時刻ノ速サニツイテ考察シヨウ」の導入から始まる．現実の世界での課題として変化する速さに対しての見通しが提示され，「問」へと移る．

問１では，「右（図８）ハ甲驛ヲ出發シテ乙驛ニ向カフ或ル列車ノ進行ヲ表ハス圖表デ ,（中略）發車後１分ゴトノ平均ノ速サヲ求メヨ」と列車の移動距離を題材に平均の速さの求め方を確認し，問２では「２分間ノ平均ノ速サト ,20 秒間ノ平均ノ平均ノ速サデハドチラガ大キイカ．圖表ノ上デ比ベル方法ヲ考エヨ」とグラフ上で平均の速さを求めることの考察から，平均の速さがグラフ上では傾きとして表れることを学ぶ．問３ではさらに「發車１分後ニ於ケル速サヲ圖上デ求メヨ」と瞬間の速さの概念を導入し，グラフ上で接線の傾きとして表れることを学ぶ．また，問４では「兩軸上ノ單位ノ長サノ等シイモノニ直シテ書ケ」と関数としてのグラフを作図することを見通した内容がある．

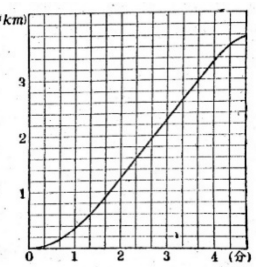

図８

これは現行の微分の導入指導と同様に既習事項としての平均の速さの時間幅を縮めることから瞬間の速さの概念の獲得を図っていると言える．一方，相違点として，瞬間の速さの取り扱いは現行の指導では代数的に瞬間の速さの数値を求めていたが，「數學　第一類」では関数的にグラフにおいて接線の傾きとして表れることを捉えることが重視されていることが分かる．

問４の後には積分につながる２つ目の導入があり ,「上デシラベタヤウニ , 時間ト距離トノ關係ヲ表ハス圖表ガアレバ , 圖上デ速サヲ求メルコトガデキル．次ニ , 時間ト速サトノ關係ヲ表ハス圖表ガアルトキ , 進行距離ヲ圖上デ求メル方法ニツイテシラベヨウ」と，時間と距離のグラフから速さを求めたように時間と速さのグラフから距離を求めることが課題として提示され「問」へと移る．

問５では，歩く人の速さを題材に時間と速さのグラフ（図９）が提示され，「コノ人ガ正午カラ午後二時マデノ間ニ進ム距離ハ , 圖表ノ上デハドノヤウナ量トシテ現レテキルカ．マタ , 午後二時カラ同四時マデノ間ニ進ム距離ニツイテハドウカ」と距離が速さと時間の積として計算し，グラフ上で面積として表れることを学ぶ．問６で

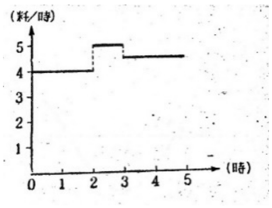

図９

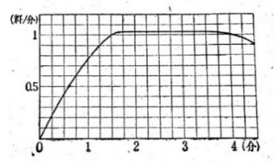

図 10

は，新たに列車の速さを題材に速さが変化するグラフ（図１０）が提示され，「列車ガ發車後４分間ニ進ム距離ヲ近似的ニ求メヨ」と問５で学習した，距離が面積として表れることを活用し，問７で「兩軸上ノ單位ノ長サノ等シイモノニ直シテ書ケ」と関数としてのグラフの作成を見通した活動を行っている．

このことから「數學　第一類」における積分の導入の特徴として，代数的な微分の逆算でも幾何的な区分求積法でもなく，速さと時間のグラフの中で距離が面積として表れることを捉えていると言える．

以上のことから「數學　第一類」では，速さと距離という関連した教材が微分・積分の導入で扱われていることが分かる．また，速さと距離のどちらもグラフ上で接線の傾きと面積として表れることを捉えることを重視していることが特徴としてあげられる．

（4）第２章「§ ２．速サト距離ノ圖表」の「問」の展開

「§ ２．速サト距離ノ圖表」の内容は「函數トシテノ速サト距離ノ觀念ヲ導入スル」ことであり，前節の内容を発展させ，関数として速さと距離を扱っている．

「§ ２．速サト距離ノ圖表」は１０の「問」から成り，「時間ト距離トノ關係ヲ表ハス圖表カラ , 時間ト速サトノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作ル方法及ビ逆ニ , 後者カラ前者ヲ作ル方法ニツイテ考究シヨウ」の導入から始まる．時間と速さ，時間と距離のグラフに着目させ，互いのグラフの関係性に関する見通しが提示され，「問」へと移る．

問１では，「前節問４デ作ツタ圖表カラ , 列車ノ各時刻ニ於ケル速サヲ表ハス圖表ヲ作レ」と，両軸の単位を揃えた時間と距離のグラフから速さをグラフ上に作図する．この活動の後に，「曲線 y=K(x) ガアルトキ , ソノ上ノ點（a, K(a)）デ引イタ接線ノ勾配ヲ , コノ點ニ於ケル　曲線ノ勾配　トイフ」と微分係数と接線の傾きについてグラフ上で直観を交えながら定義が行われる．さらに両軸の単位が揃えて書くことを前提に「各點ニ於ケル勾配ハ點ノ横座標 x ノ函數デアル．コノ函數ヲ K(x) ノ　導函數　トイフ」とグラフ上の接線の傾きとして導関数を定義している．続けて問２で「K(x) ノ導關數ハ（中略）何ヲ表ハスカ」と導関数は速さを表すことを確認し，問３で「導函數ノ正負ト , 元ノ函數ノ値ノ增減トノ間ニハ , ドノヤウナ關係ガアルカ」と導関数の値と元の関数の正負，増減の関係や極値についてもグラフでの定義が行われる．

このことから，微分の導入から継ぐ展開として，速さと距離の関連した教材の関係性に目を向けながら，現実の世界の事象がグラフ上でどのように表れるかに焦点が当てられていることが分かる．特に導関数の定義に関する特徴として，接線の傾きから導関数を捉え，視覚的な理解を重視していると言える．

問４，問５からは時間と距離のグラフの考察に移り，それぞれ「前節問５ノ圖表カラ , 歩行者ノ甲地カラノ距離ト時間トノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作レ」，「前節問７デ作ツタ圖表カラ , 列車ノ甲驛カラノ距離ト時間トノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作レ」とグラフ上での活動が重視される．また，次の問６での試みとして「甲驛ノ手前 5km ノ所ニアル丙驛カラノ列車ノ距離ヲ表ハス圖表ヲ作レ．マタ , 甲驛ノ先キ 2km ノ所ニアル丁驛ニツイテ同様ノ圖表ヲ作レ」と不定積分の値が１つに定まらないことの素地として不可能題に取り組ませている．この活動の後に，「速サヲ表ハス圖表カラ距離ヲ求メルコトハ , 或ル圖形ノ面積ヲ求メルコトニ歸着スル」とまとめ，図１１とともに，「曲

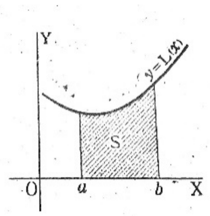

図 11

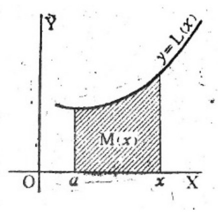

図 12

線 y=L(x) ガアルトキ , コノ曲線ト x 軸及ビ二直線 x=a,x=b ノ圍ム面積 S ヲ a カラ b マデノコノ　曲線下ノ面積　トイフ」と定積分がグラフ上で定義される．

さらに図１２を提示し，「a ヲ固定シタ場合ニ , 面積 S ヲ b ノ函數ト考ヘルコトガデキル．a カラ x マデノ曲線 y=L(x) ノ下ノ面積ヲ M(x) デ表ハストキ ,L(x) ト M(x) トノ關係ヲシラベヨ」と，元の関数と曲線下の面積の関数の関係性に着目させ，「導函數ニ對シテ元ノ函數ヲ　原始函數　トイフ」と不定積分について直観を交えながらグラフ上で定義を行っている．

このことから，導入で関数から捉えていた積分をグラフで囲まれた面積として幾何的な側面から捉え直している．また，事前に区分求積法を学習していることで実際

の面積の求め方を速さと距離の現実の世界から数学の世界へと抽象化する過程に改めて組み込まずに展開することができていると考えられる．

以上のことから，第２節では微分・積分の逆関係を捉える上で鍵概念の１つと考えられる導関数と原始関数の関係をグラフを用いて視覚化し，関数的な側面から捉えていると言える．また，グラフで導関数と原始関数の関係を扱うにあたっては，前節の現実の世界の速さと距離の内容を充分に考察したうえで，現実の世界からグラフへと抽象化がなされている．

（５）第２章「§ ３．微分」の「問」の展開

「§ ３．微分」の内容は「形式的ナ演算ヲ考究シ，應用ノ一端ニ觸レル」ことであり，前節までの内容を踏まえた上で，幾何的な側面から微分の数式としての定義や計算を扱っている．

「§ ３．微分」は４つの問から成り，「函數ガ式デ表ハサレテヰルトキソノ導函數ヲ表ハス式ノ求メ方ヲ考究シヨウ」の導入から始まる．この節では数学の世界での課題が提示され，平均変化率やその極限などをグラフを用いて解決する方法を考察している．

問１は「眞空中デ物ヲ落トスト , 始メノ x 秒間ニ凡ソ $4.9x^2$m 落チルトイフ．落チ始メテカラ ⅒ 秒間 ,1⁄100 秒間及ビ h 秒間ノソレゾレノ平均ノ速サヲ求メヨ」と，現行の指導では微分の導入として扱われている落下する物体の速さを求めることから始まり，数式を用いて平均の速さを求め，その時間幅を小さくしていく問題に取り組む．問２では問１で考えたことを基にして，「(１) ½ 秒經ツタトキ（２）a 秒經ツタトキ（３）落チ始メノトキ　ノ速サヲ求メヨ」１つ目の問で前節でのグラフ上の活動を想起させながら瞬間の速さの値を近似して求め，２つ目の問で文字を用いて一般化を図り，３つ目の問で落ち始めの瞬間の速さは０であることを学ぶ．この活動の後に「x,y ノ小サナ增加ヲ表ハスノニ , 記號 Δ x, Δ y ヲ用イルコトガアル．函數 y=K(x) デ ,x ノ値ガ２カラ Δ x ダケ增シタトキノ y ノ增加ヲ Δ y デ表セバ Δ y=K(2+ Δ x)-K(2) デアル」と微小な増加量として⊿（デルタ）を用いることで計算が容易になることを学習し，これを用いて「コノトキ Δ y Δ x ／ハ , x ガ２カラ Δ x ダケ增ス間ノ y ノ平均ノ增加率デアル」と⊿を用いた微小区間の平均増加率について説明を行った後に，「, Δ x ヲ限リナク０ニ近ヅケルトキノ Δ y/ Δ x ノ極限値ハ ,x=2 ニ於ケル y ノ增加率デアル」，と x の値における y の増加率を結びつけている．さらに続けて，「增加率ハ圖表ノ上デハ勾配デ表ハサレル．隨ツテ導函數ハ增加率ヲ x ノ函數トミタモノデアル」と，前節まででグラフから得た知識とつながりを持たせ，「函數 y=K(x) ノ導函數ヲ求メルニハ , Δ x ヲ限リナク０ニ近ヅケルトキノ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{K(x+\Delta x)-K(x)}{\Delta x}$ ノ極限値ヲ求メレバヨイ」と，数式の計算方法として導関数を再定義している．そして「或ル函數ノ導函ヲ求メルコトヲ , ソノ函數ヲ　微分スルトイフ」と微分を定義することで，現実の世界からグラフを経由して数学の世界までの様々な解釈，視点から微分の定義を行っている．

ここまでで微分の定義がなされ，問３では計算法を実際に使う内容として，「(１) $y=x^2$（２）y=3-2x（３）$y=x^2+x$」などの関数を微分することが課題となり，問４では「一邊ガ hcm ノ正方形ノ厚紙ガアル．コノ四隅カラ正方形ヲ切り落トシテ箱ヲ作リ , 容積ヲ最モ大キクシタイ．ドレダケノ大キサノ正方形ヲ切リ落トシタラヨイカ」と，現行の指導でも頻出の極大値を求めるという，現実の世界の課題を数学の世界の内容を使って解決する問題が扱われている．

このように第３節では，代数的な側面から瞬間の速さに対してのアプローチがなされ，初めて「微分」という用語が用いられる．これは，第３節に至るまでにグラフによる活動を重視し，定義される前の概念の醸成を図ったものであると考えられる．また，前節までが現実の世界とグラフの関係が主題であったのに対して，第３節は数学の世界での課題がグラフでの活動を通じて獲得した導関数の概念と結びつけられていると言える．

（６）第２章「§ ４．積分」と「問」の展開

「§ ４．積分」の内容は「形式的ナ演算ヲ考究シ，應用ノ一端ニ觸レル」ことであり，前節までの内容を踏まえた上で，不定積分の数式としての定義や不定積分と定積分のつながり，微分・積分の数式としての逆関係などが扱われている．

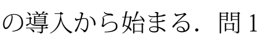

図 13

「§ ４．積分」は６つの問から成り，「函數ガ式デ表ハサレテヰルトキ , ソノ原始函數ヲ求メル方法ヲ考究シヨウ」の導入から始まる．問１では図１３が提示され，「直線 s（原點 O）ノ上ヲ動ク點 T ガアツテ , 時間 x（秒）ト T ノ速サ y（米 / 秒）」が「y=100-9.8x」で表されるとし，「T ノ座標 z（米）ヲ

x ノ式デ表ハセ．但シ ,x=0 ノトキ z=2 デアル」と前節まででグラフ上で関数を作成する活動がなされていたが，問１では数式から関数を作成する．問２では「函數 y=2x ノ原始函數ノウチ（１）x=0 ノトキ０トナルモノ（２）x=1 ノトキ -7 トナルモノヲ求メヨ」と現実の世界から数学の世界へと抽象化がなされた課題が出される．さらに続けて「或ル函數ノ原始函數ハ無限ニ多クアルガ , ソノウチノ一ツガワカレバ , 他ノモノハコレニ定數ヲ加ヘテ得ラレル」と，不定積分が一つに定まらないことを確認した上で「函數 L(x) ノ原始函數ヲ $\int$ L(x)dx デ表ハス．コノウチノ一ツガ M(x) デアルトキ $\int$ L(x)dx=M(x)+(定数) ト書ク」と積分の記法と関数の関係性が示され,「或ル函數ノ原始函數ヲ求メルコトヲ , ソノ函數ヲ　積分スル　トイフ」と定義がなされる．

このように, 微分と同じように積分でも距離に対して, 代数的な側面からのアプローチが行われている．また, 初めて「積分」の用語が用いられたが，ここでは原始関数を求める「不定積分」として定義が行われ，これに考察を加えることで微分積分学の基本定理が導出される．

問３では「問１デ x=5 ノトキカラ x=10 トナルマデノ間ニ T ガ動ク距離ヲ求メヨ」と適応題が一つ出され，さらなる積分の定義として,「曲線 y=L(x) ガアル．x 軸上デ x=a カラ x=b マデノ部分ヲ細カク等分シ , 各部ノ長サヲ Δ x デ表ハシ , ソノ分點ノ座標ヲ順次ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ トシテ , 次ノ和ヲ考ヘル」と前文が図１４とともにあった上で,「S′ =L(a) Δ x+L(x1) Δ x+L(x2) Δ x …L(x_{n-1}) Δ x」の式が提示され,「S' ハ , 曲線ガ上ノ圖ニ示スヤウニ x 軸ノ上方ニアル場合ニハ , 曲線下ノ面積 S ヲ近似的ニ表ス」と区分求積法を用いた和の式が提示され，Δ x ヲ限リナク０ニ近ヅケルトキノ上ノ和 S' ノ極限ヲ $\int_a^b$L(x)dx デ表ハシ , コレヲ求メルコトヲ L(x) ヲ　a カラ b マデ積分スル　トイフ」と極限の和として定積分が定義される．また，この段階では「S ノヤウナ和ノ極限ヲ求メル演算ヲ　定積分　トイヒ , 原始函數ヲ求メル演算ヲ　不定積分　トイフ」と２つが別々に定義されている．

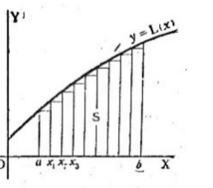

図 14

問４では「函數 y=15-2x ヲ積分セヨ．マタコレヲ１カラ７マデ積分セヨ」と適応題が出され，問５で「$\int$ L(x)dx=M(x)+(定数) デアルトキ M(x) ヲ用ヒテ $\int_a^b$L(x)dx ヲ表ハセ」と定積分と不定積分の統合がなされる．また，これにより数学の世界での微分・積分の逆関係が定義に組み込まれる．続けて問６で「放物線 y=2(x-1)(5-x) ト x 軸トノ圍ム面積ヲ計算セヨ」と，微分・積分の数式としての逆関係を用いる課題に取り組む．

このように，先に代数的な逆関係を捉えた後で積分を極限の和の公式としての「定積分」を含むものとして適応範囲を広げ，定積分も微分積分学の基本定理を用いて考えられることが扱われている．

以上のことから,「數學　第一類」では積分の定義が定積分と不定積分が極限の和と原始関数を求めることとして別々になされ，統合する形をとっていることがわかる．特に積分では現実の世界と数学の世界の間の関係性が見えづらいと考えられるが,「數學　第一類」ではグラフで表現することを通して２つの世界を近づけていると解釈できる．微分積分学の基本定理の導出についてもグラフ上で導関数と原始関数の関係性が明らかになっていたことから，数式としての逆関係にも目が向けられていると考えられる．

８.「數學　第一類」における微分・積分の逆関係を捉えるための展開に関する分析

（１）現実の世界と数学の世界について

「數學　第一類」では現実の世界の課題として微分は速さ, 積分は距離が設定されていた．それぞれに対して, 第２章「連續的變化」の第１節，第２節では現実の世界とグラフ，第３節と第４節では数学の世界とグラフがそれぞれ主題として扱われていた．

積分の指導を考えたとき，この直観的に剥離しているように感じられる２つの世界の内容がグラフを媒介とすることで関連づけて学習することが出来ていると言える．しかし，微分の指導を考えたときに，既習事項とのつながりなどを考慮すると，第１節と第３節の内容を分ける必然性が感じられないという点は課題としてあげられる．

（２）扱われている教材について

分析の視点として，微分・積分が相互に関連した教材が扱われているかを設定したが,「數學　第一類」では条件を満たす速さと距離が用いられていた，

この教材を用いて前節の２つの世界の行き来をすることでグラフ，数式と抽象化が行われていく中でも微分・積分の間の関係性が意識出来ていると言える．また，指導順序について，微分と積分が交互に表れる構成となっていたが，目的が明確に設定されているため方向性を見

失わずに展開されていると考えられる．

（3）微分・積分の逆関係の捉えについて

「數學　第一類」において微分・積分の逆関係として大きく，数学の世界での代数的な捉え，グラフを用いた導関数・原始関数の関数的な捉え，現実の世界をグラフで考察した接線の傾き・面積の幾何的な捉え，現実の世界における速さ・距離の関係の捉えの４つが扱われていると考えられる．

これは現行の代数的な捉えが重視された指導と比較して，具体・抽象の点も含め，豊富な見方がされていると言える．このことから，微分・積分の逆関係を捉えるとして本研究で設定した定義から考えた時には定義自体に再考察を加える必要はあるが,有効な点が多いと言える．

９．本研究の知見と今後の課題

（1）本研究の知見

「數學　第一類」の教科書では微分・積分それぞれに速さと距離の主題が設定され，この主題に基づき，現実の世界から数学の世界へとグラフでの活動を豊かにしながら抽象化がなされていた．このような内容が「微分・積分の逆関係を捉える」ための微分・積分指導を考える上では．一つ有効な方法であることが分かった．

（2）今後の課題

微分・積分の逆関係を捉えるための指導として有効な点が多いことが明らかになった一方で，現行の指導と比べ，微分の指導において必然性が失われていることを指摘した．また，第２章「連續的變化」の内容を扱う際には区分求積法を含む，極限の概念を把握していることを前提として,事象の考察の手段として用いることも多い．現行の指導要領の中でこのような流れを組み込むためには，その点を考慮した予備指導，もしくはその都度極限の概念を醸成させることまで目を向けた教材研究が必要となることが課題として残っている．今後は概ね「數學　第一類」の方針に基づきながらも，主にこの２つの点に考慮して微分・積分の指導を考えていく．

引用・参考文献

中等學校教科書株式會社 (1943)．數學編纂趣意書　1　第一類（中學校用），中等學校教科書株式會社.

中等學校教科書株式會社 (1944)．數學編纂趣意書　4・5　第一類（中學校用），中等學校教科書株式會社.

中等學校教科書株式會社 (1944)．數學　4　第一類（中學校用），中等學校教科書株式會社.

樋口禎一・細川尋史・池田敏和 (1998)．数学の才能を育てる，牧野書店.

池田敏和 (2017)．モデルを志向した数学教育の展開:「応用指向 vs 構造指向」を超えて，東洋館出版社.

池田敏和・藤原大樹 (2016)．数学的活動の再考, 学校図書.

小平邦彦 (1986)．怠け数学者の記，岩波現代文庫.

高等学校数学教育研究会 (2011)．高等学校　数学教育の展開，聖文新社.

文部科学省 (2009)．高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，実教出版.

文部科学省 (2015)．論点整理，教育課程企画特別部会，(8 月 26 日)．

文部科学省 (2016)．最終報告，高大接続システム改革会議，(3 月 31 日)．

長崎栄三 (1990)．「数学教育再構成運動と数学第一類・第二類の誕生 : 戦時下の中学校数学教育」，國立教育研究所研究集録，第 20 号，pp.85-102.

長崎栄三 (1990)．「数学第一類・第二類の検定教科書の編纂とその思想 : 戦時下の中学校数学教育」，國立教育研究所研究集録，第 21 号，pp. 43-56.

長崎栄三 (1991)．「戦時中の中学校数学教科書『数学第一・二類』の分析：題材と生徒の活動」，数学教育論文発表会論文集，第 24 号，pp. 305-310.

成田慎之介 (2015)．「『數學　第一類』における極限概念の形成に関する一考察―『極限観念の発生』から『近迫の状態』へ―」，日本数学教育学会秋期研究大会発表集録，第 48 号，pp.443-444.

杉山吉茂・澤田利夫・橋本吉彦・町田彰一郎 (1999)．数学科教育　中学・高校，学文社.

数研出版 (2014)．数学Ⅱ，川中宣明編.

田中義久 (2007)．「『數學　第一類』における微積分に関連した問の構成に関する研究」，数学教育論文発表会論文集，第 40 号，pp.757-762.

冨田真永 (2012)．「『數學第二類』における三角比指導に関する研究―問の役割に焦点をあてて―」，横浜国立大学平成 23 年度修士論文.

塚原久美子 (2002)．数学史をどう教えるか　算数・数学の授業における数学史活用の目的・方法と実践，東洋書店.

Victor J.Katz 著，上野健爾・三浦信夫監訳 (2005)．カッツ　数学の歴史，共立出版.