教員養成課程の学生に対する ε -N 論法の概念理解の研究

～チェザロ平均の教材としての有効性～

教育デザインコース　数学領域
成田　竜也，山本　光
慶應義塾大学社会学研究科　清水　優菜

1. 問題と目的

数列の極限を議論する方法に，「ε -N 論法」というものがある．ε -N 論法は，有限な実数値のみを用いて極限を厳密に議論する方法であり，主に大学の微分積分学や解析学の授業で習う内容である．この論法の 1 つの強みは，収束や発散を数量的に表現できる点である．この論法を用いることで，平面 R^2 における点列の収束に限らず，一般の距離空間や位相空間における点列の収束を表現可能にするため，この論法は極限を深く学ぶ上での土台と言える．

ε -N 論法を学ぶ上で問題視されるのは，概念理解の難易度の高さである．たとえば田島 (1978) は，数列および関数の極限を厳密に議論する方法を総じて ε -δ 論法と呼び，「解析学を少しきちんとやろうとするとき，まず最初にぶつかる難関は ε -δ 論法」と述べている．また村上 (2014) は，高校数学との難易度の差に衝撃を覚える概念として，これを「イプシロンデルタショック」と表現している．これらのことから，概念理解の困難性の解消に向けた指導の模索は，必須事項であると考えられる．

ここで ε -N 論法とは何か，その概要を，Figure1 を用いて簡単に説明する．

そもそも高校での数列の極限の定義は「数列 $\{\alpha_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，α_n が一定の値 α に限りなく近づく」(東京書籍) であった．これを踏まえて，収束する数列を洞察すると，極限値からの距離 ε をどのように取っても (Figure1 ①)，番号 N が (Figure1 ③) より大きい点列において常に α_n と α の距離が ε 未満となる (Figure1 ②)，(Figure1 ③) が存在することがわかる (収束数列において，このような N は無限に存在する)．つまり，収束する数列は，「どのような $\varepsilon > 0$ に対しても，$n > N$ となるすべての n において，において，$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たすようなある自然数 N が存在する」と表現できる．これが論法による収束する数列の定義であり，ε -N論法によって，極限を数量的に表現できるようになる．

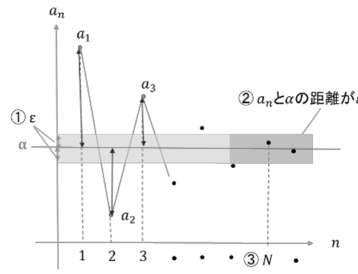

Figure1　2 次元グラフによる説明

参考までに，1 次元グラフによる図を Figure2 に示す．

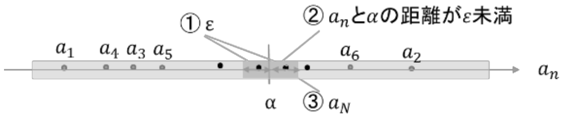

Figure2　1 次元グラフによる説明

ε -N 論法の概念理解のための教材，指導法の検討を行った研究として，Roh(2007) や Flores & Park(2016) などの研究が挙げられる．たとえば Roh(2007) は，ε -N 論法による定義を理解できない要因として，最初に番号 N を選択し，次に番号に N 対応する ε が極限値にどれくらい近いかを決定しようとすることを挙げ，その解消を促す教材を作成し，授業実践を行っている．そのような中，日本において成田 (2017) は，ε -N 論法の概念理解のための教材作成とその効果の測定を教員養成課程の数学科の学生を対象に行っている．

成田 (2017) が教員養成課程の学生を対象にした理由には，ε -N 論法による極限の定義や無限級数に関する知識が数学教員として必要であることが挙げられる．それらの知識を身に着けることによって，たとえば，極限の厳密な議論には実数論やイプシロンエヌ論法が必要となり，高校の極限の定義のあいまいさがわかる．

丹羽ほか (2010) は，「自信をもって数学を指導できる能力」や「教科内容がどのように変更されようと，主体的な教材研究を行い的確な対応ができる能力」などを

数学専門科目によって育成すべき能力として挙げている．それに応えるためには上記のような極限に関する知識が必須となるだろう．指導としては学習への動機づけを高めたり，理解の困難さを和らげる教材の作成が検討されるべきだろう．

ところで，成田 (2017) の実践では，2 つの研究として課題があると述べられている．1 つはグラフの形状の差異が概念理解の難易度の上昇に影響していることの検証である．

成田 (2017) の実践では，概念定義と概念イメージを相互に学習することによって理解が促進されることを示した Tall & Vinner(1981) の研究をもとに教授実験を行っている．現状として，現行の高校の数学Ⅲの教科書 (東京書籍，数研出版など) においては，数列の極限を 2 次元グラフで説明している場合が多い．そのため, 成田 (2017) の実践においては概念イメージとして 2 次元グラフが用いられている．しかし一部，高校の現行の教科書 (たとえば啓林館) やグラフを用いた説明をする大学の専門書の大多数 (原ら , 2011; 村上 , 2014; 田島 , 1978 など) は，点列の動きを 1 次元グラフで表現している．中等教育と高等教育の接続を考えて概念理解を促すとすると，論法の学習の際も 2 次元グラフを用いるのが妥当と考えられる．その妥当性を担保するために，実際にどの程度の学生が数列の極限を考える際，2 次元グラフ (または 1 次元グラフ) を用いているかを調査する必要がある．もし 2 次元グラフで考える学生が多いのであれば，慣れない表現である 1 次元グラフによる説明が影響して，概念理解の難易度が高くなっているとも考えられる．

もう 1 つは，ε -N 論法の必要性を述べる際に「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する時, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ がに α 収束する (以下,“チェザロ平均の極限命題”とする) ことを証明せよ」という問題を用いる有用性の検討である．ε -N 論法の必要性をチェザロ平均の極限命題によって感得させようとする参考書はいくつもある (たとえば服部ほか , 2013; 村上 , 2014 など)．具体的には，チェザロ平均の極限命題を証明するには，数学Ⅲで習う極限の定義では難しいので，ε -N 論法による厳密な議論が必要になると学習者に提示している．

教材研究の視点から，ε -N 論法の導入においてチェザロ平均を題材にする有効性を 2 つ述べる．1 つは，数学Ⅲで学ぶ無限級数からの接続という視点である．たとえば中等教育段階にて，チェザロ平均と関連した級数であるグランディ級数 (無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ のこと) が扱われることがある (大分県教育委員会)．チェザロ総和法を用いたとき，グランディ級数のチェザロ和は $\frac{1}{2}$ となる．このチェザロ総和法は，チェザロ平均を利用した総和法であるためグランディ級数との関連性が見て取れる．また 2006 年の東京大学の入試問題で，具体的な数列のチェザロ平均の極限値を求めさせる問題が出されている．

これらのことから，難関大学の数学科の学生はチェザロ平均について知っている可能性はある．しかし，命題の正誤に関して，ほとんどの人は直感で正誤を判断するしかないと考えられる．よって難関大学の数学科に入学できるような人にとっては，興味を引き付けるという意味で有効であり，直感で正誤を判断する人は，未知の教材として扱える有効性があると考えられる．

もう 1 つは，大学で学ぶ無限級数への接続という視点である．この命題を扱う際に，グランディ級数とチェザロ平均の話題を同時に扱い，それらが関連していることを教員が述べることで無限級数への興味・関心を高めることにもなりうる．

これらを踏まえて本研究では，この命題を未知の教材として扱える有効性を検討する．そのために，直感で正誤を判断してもらい，学習者特性の違いを分析する．この命題を直感的に真だと思う学習者は，直感的に当たり前である答えを証明することになる．そのため，この論法の必要性を感得しにくいと考えられ，直感的に真だと思う学習者の存在は，成田 (2017) によって指摘されている．逆に，直感では偽と判断していた学習者は，必要性を強く認識すると考えられる．よって，本研究ではこの命題を直感的に偽と判断する学習者の特性を把握し，直感に反する教材としての有効性を考察した．

以上のことを踏まえて，本研究の目的を「教員養成課程の学生に対する論法の概念理解のための指導法およびチェザロ平均の極限命題の教材としての有効性の検討を行うこと」と設定する．

2. 方法

2.1. 調査対象

本研究では，教員養成課程の学生の特徴を見出すために，教員養成課程の学生と理工学部の学生に対して質問紙調査を行った．具体的には，横浜国立大学教育人間科学部に在籍する数学領域の大学 2，3 年生 (以下，“学校教育課程”とする)35 人および同大学理工学部の大学 1，2，3 年生 (以下，“理工学部”とする)74 人を対象

とした．教員養成課程のほとんどの学生は論法を未習のため，対象群には理系で論法を未習と考えられる理工学部の学生を設定した.

2.2. 調査内容

本研究では，概念理解の指導法を検討するための調査項目を設定し，またそれらの項目を学習者特性として，チェザロ平均の極限命題の利用可能性を検討する.

調査内容としては「大学数学の必要性」,「教員養成課程での大学数学の授業方法」,「数列の極限に関する意識」について尋ねた．以下でその詳細を述べる.

2.2.1.「大学数学の必要性」について

教員になったとき ε -N 論法のような大学数学の専門知識が，小中高生に授業する際，直接的に活かされることは少ないと指摘されることも考えうる．そこで本調査では数学教師になろうとする学生の概念理解の必要性の根拠を学生からの要請という観点から見出すこととした．教員養成課程の学生が，学習する必要性を強く感じているならば，適宜，学習の場を設けるべきだろう.

具体的な項目としては,「小学校で算数を教える際，大学で習うレベルの数学を学んでおく必要がある.」(以下,“ 算数の教授で大学数学が必要 ” と名付け，以降二つの項目も同様に名付ける),「中学校で数学を教える際，大学で習うレベルの数学を学んでおく必要がある.」,「高校で数学を教える際，大学で習うレベルの数学を学んでおく必要がある.」の 3 つを取り入れた.

2.2.2.「教員養成課程での大学数学の授業方法」について

小中高での数学教育と大学での数学教育では授業方法に大きな差がある．たとえば講義型授業とアクティブラーニング型授業といった分類を考えたとき，それぞれの取り組み方による学習成果に及ぼす影響の検討はよくなされる (たとえば OECD, 2012).

しかし，大学数学の専門教育においては，講義型授業がほとんどであり，学習効果を高めるためにはこのような授業方法の観点も考慮していく必要がある．このことから,「数学を探究するために，一方的に教授から教わるのではなく，学生同士で話し合うような課題提示があったほうがよい.」(以下,“ 話し合いの必要性 ” とする) という項目を設定した.

また教員養成課程において数学専攻の学生であっても文系の学生は一定数存在するため，理工学部の学生と比較すれば，数学の概念理解に困難を感じる学生が多いと考えられる．そこで半澤 (2007) による「学業に対するリアリティショック尺度」26 項目のうちの講義水準に関する項目を参考に, 学生が求める講義水準を尋ねた．具体的には,「教員養成課程では文系の学生もいるので，授業は基礎的な概念を中心に構成されるべきである.」(以下,“ 基礎概念を中心にした授業 ” とする) といった項目を設定した.

2.2.3.「数列の極限に関する意識」など

成田 (2017) が作成した「数列の極限に関する意識」の中の三項目とチェザロ平均の極限命題に関する項目を一つ調査した．具体的には,「ある数列が収束することがどういうことか, 直感的に理解している.」(以下,“ 収束の直感的理解 ” とする),「大学で扱うレベルの「数列の極限」に興味がある.」(以下,“ 大学で習う極限への興味 ” とする),「極限の定義の「限りなく大きく」や「限りなく近づく」という文言はあいまいな表現であると思う」(以下,“ 高校の定義のあいまいさ ” とする),「命題「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する時, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ もに α 収束する」は正しいと思う (直感でお答えいただいて構いません.)」といったものである.

以上の項目に加え，数学Ⅲの履修，高校数学の免許の取得予定かどうかについても尋ねた．このうち, 数学Ⅲ履修, 高校数学の免許の取得予定かどうかについては「はい」(1),「いいえ」(2) の 2 件法で, その他の設問は,「そう思う」(5),「まあそう思う」(4),「どちらともいえない」(3),「あまりそう思わない」(2),「そう思わない」(1) の 5 件法で尋ねた.

また大学生の利用するグラフの形状を把握するために「数列の極限をグラフで考えるとすれば，以下のどちらを用いますか.」という質問項目を設定した．そして,「一次元グラフ」(以下, “1 次元グラフを利用 ” とする),「二次元グラフ」(以下, “2 次元グラフを利用 ” とする),「どちらも用いない」(以下,“ グラフ不使用 ” とする) という解答項目のうちいずれか 1 つを選択してもらうように尋ねた.

2.3. 手続き

調査は教室内での集団自記式で行った．また，協力者には「大学数学の必要性への意識および数列の極限に関する調査」であると説明した．調査に要した時間は配布，回収を含めて約 15 分であった.

3. 結果

以下，5 件法で求めた回答はそのまま 1 点から 5 点へと点数化した.

3.1. 大学数学の必要性，授業観の比較

まず，大学数学の必要性と授業観に関する記述統計量および平均値を比較したものを Table1 に記す．Table1 における Mean とは平均，SD は標準偏差，Cohen's d は効果量を示す．効果量とは，「サンプルサイズによって変化することのない，標準化された指標 (水本ら , 2008) であり，その目安として 0.5 は効果量中，0.8 以上は効果量大と判断する．よって，本調査は 3 項目が効果量中，2 項目が効果量大であるため，実質的効果のあるものと言える.

各項目における t 検定の結果，学校教育課程はすべての項目において有意に高い値となっていることがわかる．つまり学校教育課程は，大学数学の必要性を理工学部よりも強く感じ，基礎的な概念の習得および大学数学において話し合いの場面を要請していることがわかった.

3.2. 学校教育課程と理工学部の相関の比較

次に，学校教育課程と理工学部の回答の相関を比較するために，学校教育課程と理工学部それぞれ相関係数を求めた (Table2)．その際，名義尺度同士の関連には，φ 係数を，順序尺度との関連には Pearson の相関係数を用いて求め, カッコ内はサンプル数を表している．今回は，学校教育課程で相関が見られたが理工学部では見られなかった項目に着目して結果を述べる.

その結果，学校教育課程は，高校で数学Ⅲを履修していても，収束の理解に自信がなく (ⅰとⅲ)，大学で習う極限に興味がない (ⅰとⅳ) 傾向にあることがわかった．また高校数学の教員免許を取得しようとしている人ほどチェザロ平均の極限命題を正解する (ⅱとⅴ) が，収束を直感的に理解していると思う人ほどチェザロ平均の極

Table1 数学の意識，授業観の比較

	学校教育課程		理工学部		t 値		Cohen's
	N	Mean(SD)	N	Mean(SD)	t	p	d
算数で大学数学が必要	35	3.46(1.01)	73	2.78(0.89)	2.36	0.02	0.73
中学数学で大学数学が必要	34	4.00(0.55)	73	3.48(0.89)	2.19	0.03	0.65
高校数学で大学数学が必要	35	4.77(0.12)	73	4.47(0.36)	2.36	0.02	1.00
話し合うような課題提示が必要	32	3.78(0.44)	74	3.35(0.50)	2.12	0.04	0.89
基礎的な概念を中心にした授業	35	3.46(0.30)	74	3.00(0.58)	2.52	0.01	0.90

Table2 学校教育課程と理工学部の相関の比較

	対象	i	ii	iii	iv	v
ⅰ.数学Ⅲの履修	学校教育課程	―	-0.06	-0.53*	-0.50*	0.14
	理工学部		0.03	-0.12	0.01	0.10
ⅱ.高校数学の免許	学校教育課程		―	-0.10	0.05	0.48*
	理工学部			0.01	-0.16	-0.21
ⅲ.収束の直感的理解	学校教育課程			―	0.62**	-0.41*
	理工学部				0.31*	0.16
ⅳ.大学で習う極限への興味	学校教育課程				―	-0.08
	理工学部					0.06
ⅴ.チェザロ平均の極限命題への直感	学校教育課程					―
	理工学部					

* $p < .05$ ** $p < .01$

限命題を間違える (ⅲとⅴ) 傾向にあることもわかった.

3.3. グラフの形状について

学生が用いるグラフの形状を調査するために，それらの項目を利用してクロス分析を行った (Table3). その際, Ryan の多重比較を 0.1％水準で行った結果，学校教育課程も理工学部も 2 次元グラフによって極限を考える割合が多いことがわかった.

Table3　クロス集計

	1.1 次元グラフを利用	2.2 次元グラフを利用	3.グラフ不使用	合計	Ryan の多重比較
学校教育課程	0	21	2	23	2>1,3
理工学部	7	60	6	73	2>1,3
合計	7	81	8	96	2>1,3

3.4. チェザロ平均の極限命題を間違える学習者への教育的介入可能性

チェザロ平均の極限命題を間違える学習者への教育的介入可能性を検討するために，クラスタ分析によって，正解群と不正解群に分かれるよう分類した．分析は質問紙項目の得点を用いて，Ward 法，ユークリッド距離によって行った．デンドログラムの距離を 167 としたときにできる 4 つのクラスタをもとに，各質問の得点を ANOVA によってクラスタごとに比較した (Table4).

教育的介入可能性について，Lazowski & Hulleman(2013) の「介入」に関する定義をもとに説明する．すると「教育的介入可能性」とは「学生の認知，感情, 行動を変更することを意図した外部エージェント (教師や研究者) によって実施される操作ができるかどうか」と考えられる.

Tukey の HSD 法 (5% 水準) による多重比較を行ったところ，第 1，第 4 クラスタよりも，第 3 クラスタの方がチェザロ平均の極限命題を間違えるという結果が得られた (第 1，第 4 クラスタは M=3 程度，第 3 クラスタは M=2 程度)．これをもとに第 1 クラスタと第 3 クラスタの平均値の差に注目すると，小・中学校で教える際に大学レベルの数学が必要と感じていること，数列が収束することを理解していること，数列の極限に興味があることに関する項目すべてで第 3 クラスタの値が低いという結果が得られた. ちなみに第 4 クラスタは興味, 関心項目の平均値が低いもののチェザロ平均の極限命題を間違えにくいグループである.

以上のことより，チェザロ平均の極限命題を直感的に間違える群の特徴として，算数または中学数学を教える際に大学数学を必要と感じないことが挙げられる．また収束を直感的に理解していると思わないことや数列の極限に興味がないこと，高校の極限の定義にあいまいさを感じないことも特徴である.

4. 考察と今後の課題

4.1. 結果のまとめ

本研究の目的は「教員養成課程の学生に対する論法の概念理解のための指導法およびチェザロ平均の極限命題の教材としての有効性の検討を行うこと」であった.

以下では，この目的を踏まえて考察していく．まず今回の分析結果を以下にまとめた.

Ⅰ．学校教育課程は，大学数学の必要性を理工学部よりも強く感じている．また基礎的な概念の習得および大学数学において話し合いの場面を要請している．(Table1)

Ⅱ．学校教育課程は，高校で数学Ⅲを履修していても収束の理解に自信がなく，また大学で習う極限に興味がない傾向にある．また高校数学の教員免許を取得しようとしている人ほど, チェザロ平均の極限命題を正解するが, 収束を直感的に理解していると思う人ほど，チェザロ平均の極限命題を間違える傾向にある．(Table2)

Ⅲ．学校教育課程も理工学部も 2 次元グラフによって数列の極限を考える人が多い．(Table3)

Ⅳ．チェザロ平均の極限命題を直感的に間違える群は, 算数または中学数学を教える際に大学数学を必要と感じない．また収束を直感的に理解していると思わないことや数列の極限に興味がないこと，高校の極限の定義にあいまいさを感じないことも特徴として挙げられる. (Table4)

Table4 クラスタ間での質問紙得点の比較

	第１クラスタ(N=26)		第２クラスタ(N=30)		第３クラスタ(N=31)		第４クラスタ(N=22)		F 値	Tukey の多重比較
	n	Mean (SD)	n	Mean (SD)	n	Mean (SD)	n	Mean (SD)		
算数の教授で大学数学が必要	26	4.35 (0.89)	30	3.50 (1.31)	30	2.13 (0.90)	22	1.91 (0.75)	34.22***	1>2>3,4
中学数学の教授で大学数学が必要	25	4.68 (0.56)	30	4.17 (0.91)	30	3.23 (1.17)	22	2.32 (0.99)	29.47***	1,2>3>4
高校数学の教授で大学数学が必要	26	4.92 (0.27)	30	4.87 (0.35)	30	4.73 (0.45)	22	3.50 (0.96)	36.01***	1,2,3>4
収束の直感的理解	23	4.22 (0.52)	28	4.29 (0.81)	28	3.54 (1.10)	20	4.05 (0.60)	4.71**	1,2>3
大学で習う極限への興味	23	3.57 (0.90)	28	4.32 (0.77)	28	2.68 (1.12)	20	3.25 (0.97)	14.43***	2>1>3, 2>4
高校の定義のあいまいさ	23	3.22 (1.24)	28	3.25 (1.35)	28	2.04 (0.92)	20	3.00 (0.97)	6.79***	1,2,4>3
チェザロ平均の極限命題への直感	22	3.05 (1.53)	28	2.46 (1.43)	28	1.89 (1.20)	20	3.15 (1.23)	4.55**	1,4>3

* $p < .05$ ** $p < .01$ *** $p < .001$

4.2. 考察

Ⅰの結果から，学校教育課程は理工学部よりも，算数，数学を生徒に教える際，大学数学の必要性を強く感じていることがわかった．その理由としては，数学教育を専門的に学んでいることが影響したと考えられ，たとえば算数と中学数学の系統性を意識した授業作成の大切さを学んでいること，学問的に正しい内容を教えるために大学数学が必要だということを学生同士の話し合いなどを通じて強く感じているのだと考えられる．そのため ε-N 論法の学習に際しては，高校の極限の定義の復習を含め，高大接続を意識した授業を行うことで，積極的な取り組みが期待できる．

次に基礎的な概念の習得の要請の度合いが強いことから，丹羽 (2010) の作成したカリキュラムをもとに考えれば，一般の距離空間や位相空間の話までは行わないとしても，平面 R^2 上での ε-N 論法による点列の収束の定義の概念理解は確実な習得が望まれる．学校教育課程において，基礎的な概念の習得の要請の度合いが強くなったのは，数学の基礎的な内容に自信がないためと予想され，ミスコンセプションを起こさずに，イメージを確実に持つような教材作成が望まれる．これは，Vinner(1983) が，数学的概念の形成過程において「概念定義」と「概念イメージ」がズレて，ミスコンセプションが起こると述べていることからも気を付ける事柄として考慮すべき点と言える．たとえば具体的な収束する数列に加え，発散，振動する数列を２次元グラフによって複数提示し，論法を吟味する機会を与えることが有効と考えられる．

次にⅡの結果から，学校教育課程は，高校で数学Ⅲを履修していても収束の理解に自信がなく，また大学での極限の内容に興味がないことがわかった．これは大学受験において教育学部を受ける理系学生は，理工学部を受ける理系学生に比べて，数学のテストの点数が低く，関心も低いことが影響したのではないかと考えられる．そのため教員養成課程の理系学生に対して ε-N 論法を教えたとき，興味が学習パフォーマンスへ正に影響することが予想されることから，理工学部の理系学生と比較して効果が低いと考えられる．

またⅢの結果から，ε-N 論法によって極限を考える際は，２次元グラフを用いることで慣れた形式で学べる学生が多いことがわかった．まずこのようになった理由を，２次元グラフを用いるメリットを考えることで探りたい．メリットとして，たとえば数列の収束を１次元グラフで表現しようとすると α 極限値周辺に点が密集して見づらくなるが，２次元グラフだと番号ごとに同じ間隔を開けているので密集することはなく相対的に見やすいことが挙げられる．また２次元グラフだと漸近線を用いるため，これがわかりやすさを促進すること，漸化式

の視覚的理解に2次元グラフが必要となることなどもメリットとして考えられる．また大学の専門書の大多数が，点列の収束を1次元グラフで表現していることから，慣れない表現である1次元グラフによる説明が影響して，ε-N 論法の概念理解の難易度が高くなっているのではないかと考えられる．

最後にⅣの結果から，適当な群分けによって，不正解群が収束を直感的に理解していると思わないこと，数列の極限に興味がないことなどの特徴が見出せた．そのためこの群に対しては，高校レベルの知識を再確認し，正しいイメージをもたらせるような指導をする必要があると考えられる．またチェザロ平均が級数や総和法の話題につながることを述べると，興味を持たせつつ効果的に教材を利用できるだろう．

4.3. 今後の課題

最後に本研究の課題を3つ述べる．1つ目は，今回の調査結果を踏まえた授業考案とその実践である．たとえば成田 (2017) は，知識伝達型授業で行っているので，話し合いの場面を取り入れたい．その際たとえば，市川 (2008) の「教えて考えさせる授業」を参考にしてもよいだろう．またグラフの形状の違いによる理解の度合いの相違の検討も課題である．

2つ目は，学習者特性を考慮したチェザロ平均の極限命題の教材としての有用性を更に見出すことである．たとえば，情意面の尺度として市川 (1997) の作成した学習動機などの尺度を参照したい．

3つ目は，教員養成課程の学生が ε-N 論法を学ぶのに必要な知識が得られているのかを調査することである．たとえば「A ならば B が真であること」や「すべての～」といった表現を理解しているか，そのテスト項目の作成とその調査である．成田 (2017) はこういった表現を避けて授業を行っているが，前提知識の有無の調査によって，ε-N 論法での適当な定義の表現方法を見出すことができるだろう．

参考文献

Flores, A. & Park, J. (2016). Students' guided reinvention of definition of limit of a sequence with interactive technology. Contemporary Issues in Technology & Teacher Education, 16(2), 110-126.

半澤 礼之 (2007)「大学生における「学業に対するリアリティショック」尺度の作成」キャリア教育研究 25,15-24

原 惟行 , 松永 秀章 (2011)「イプシロン・デルタ論法 完全攻略」共立出版

服部 泰直 , 正村 修 (2013)「高大連携 微分積分学」学校図書出版社

市川 伸一 (1995)「学習動機の構造と学習観との関連」日本教育心理学会 37,177

市川 伸一 (2008)「「教えて考えさせる授業」を創る―基礎基本の定着・深化・活用を促す「習得型」授業設計」図書文化社

K.H. Roh.(2008) An Activity for Development of the Understanding of the Concept of Limit. Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,31,4,105-112

高等学校数学科用教科書 (2012)「新編数学Ⅲ」東京書籍 302

高等学校数学科用教科書 (2012)「数学Ⅲ」数研出版 309

高等学校数学科用教科書 (2012)「新編数学Ⅲ」啓林館

水本 篤，竹内 理 (2008)「研究論文における効果量の報告のために―基礎的概念と注意点―」英語教育研究 31, 57-66

村上 仙瑞 (2014)「イメージでつかむ イプシロンデルタ・位相空間論」プレアデス出版

成田 竜也 (2017)「教員養成課程の学生に対する ε-δ 論法の指導法の考案とその効果」日本教育工学会研究報告集 17,1,135-142

丹羽 雅彦，松岡 隆，川崎 謙一郎，大竹 博巳，伊藤 仁一 (2010)「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」数理解析研究所講究録，17, 11, 106-129

OECD(2012)「OECD 教員白書 - 効果的な教育実践と学習環境をつくる (第 1 回 OECD 国際教員指導観協調査 (TALIS) 報告書)」明石書店

大分県教育委員会 (2010)「数学科習指導案」http://kyouiku.oita-ed.jp/koujou-tane/image/s%20kyokugen.pdf(2017.10.18 最終確認)

田島 一郎 (1978)「イプシロン - デルタ 数学ワンポイント双書」共立出版

Tall, D.& Vinner, S(1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12,2,151-169.

Vinner S.(1983) Concept definition concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,14,3,293-305