別紙様式第２号

学位論文及び審査結果の要旨

横浜国立大学

氏　　名	韓　呼和
学位の種類	博士（学術）
学位記番号	環情博甲第 1899 号
学位授与年月日	平成 29 年 3 月 24 日
学位授与の根拠	学位規則（昭和 28 年 4 月 1 日文部省令第 9 号）第 4 条第 1 項及び横浜国立大学学位規則第 5 条第 1 項
学府・専攻名	環境情報学府・情報メディア環境学専攻
学位論文題目	Study on Wulff shapes and their duals （ウルフ図形と双対ウルフ図形の研究）
論文審査委員	主査　横浜国立大学　教授　西村尚史 横浜国立大学　教授　根上生也 横浜国立大学　教授　野間　淳 横浜国立大学　教授　中本敦浩 横浜国立大学　准教授　原下秀士 横浜国立大学　講師　牛越恵理佳

論文及び審査結果の要旨

ウルフ図形とは、Georg Wulff の論文（1901, Z. Kristallogr.）で与えられた、平衡状態にある結晶の幾何学的モデルである。体積一定という条件の元で表面エネルギーを最小にする図形がウルフ図形であろう、という予想を証明することに関しては長い歴史があり，Alexander Dinghas（1944, Z. Kristallogr.）が形式的な証明を、Jean Taylor（1978, Bull. Amer. Math. Soc.）が幾何学的測度論により表面エネルギーが定義可能であるような非常に広いクラスに対して厳密な証明を、そして、Irene Fonseca（1991, Proc. Roy. Soc. London Ser. A）が一般次元での簡潔な証明を与えた。本論文は、これらの記念碑的業績を含む従来の研究ではほとんど取り扱われていなかった、ウルフ図形と双対ウルフ図形の密接な関係に的を絞り、独自の手法により様々な観点から詳細に研究したものであり、十分なオリジナリティがある国際レベルの優れた論文である。

第 1 章の Introduction から始まる本論文は全 7 章で構成されており、すべて英語で書かれている。

第 2 章ではオリジナルな手法である Spherical Method が解説されており、中心射影の逆写像を通して球面上で考えることの有用性や意義について概説してある。

第 3 章では、球面双対変換は等長的であることが示されている。それのみにとどまらず、性質のよい様々な部分空間に球面双対変換を制限して等長変換が得られるや否や、あるいは、双 Lipschitz 写像であるや否や、ということも詳しく調べられている。ユークリッド空間内での双対変換は等長的にならないことを鑑みると、本章での主要な結果は、球面上で考えるほうが自然であることを示唆している結果の一つと解釈できる。

第 4 章では自己双対ウルフ図形について考察しており、「ウルフ図形が自己双対的であることの必要十分条件は、対応する球面凸体が球面上において距離 $\pi/2$ の等幅図形になっていることである」という研究成果が示されている。この研究成果の証明は、著名な幾何学者 Marek Lassak による球面凸体に関するある分類結果（2015, Aequationes Math.）が鍵となっており、本章の結果により、「ウルフ図形と球面幾何学との融合」についての研究の扉は開かれたと言っても過言ではない。さらに、平面 $\mathbf{R}^2$ 内の等幅図形として名高いルーローの三角形は、原点を内点として含めばウルフ図形になるが、自己双対ウルフ図形には決してならないことも本論文で示してあり、この章で述べられている研究成果もまた、中心射影を経由して球面上で考えるほうが自然であることを示唆している結果の一つとみなせる。

第 5 章では、Convex Integrand とウルフ図形との対応を詳しく調べ、「Convex Integrand が C^1 級であることの必要十分条件は対応するウルフ図形が狭義凸であることである」ということが示されている。Convex Integrand とは Jean Taylor が 1978 年に上記論文で導入した概念である。ウルフ図形は球面上の正値連続関数を用いて定義されるが、Convex Integrand と呼ばれる特別な正値連続関数はウルフ図形と 1 対 1 に対応するもっとも効率の良い関数であり、双対ウルフ図形とも密接に関連する重要な概念である。本章の研究成果は、「Convex Integrand が $C^{1,1}$ 級であることの必要十分条件は対応するウルフ図形が一様凸であることである」という Frank Morgan の結果(1991, Math. Ann.）の、自然で望ましい一般化になっている。さらに、本章の結果の系として、「狭義凸なウルフ図形の境界が C^1 級であれば、双対ウルフ図形は狭義凸になり、その境界は C^1 級である」ということが得られる。「ウルフ図形の境界が C^1 級であっても、双対ウルフ図形の境界は必ずしも C^1 級とは限らない」ことはよく知られているので、本章の結果により、ウルフ図形と双対ウルフ図形が共通してもつ、望ましい性質が得られたことになる。本章の結果の応用は他にもいろいろあり、それらも本章で書かれている。

第 6 章では「C^∞ 級 Convex Integrand のなす位相空間の中で安定な Convex Integrand は稠密に存在するのか？」という制約条件付き構造安定性問題に対して肯定的な解答を与えている。制約条件付き構造安定性問題は、John Mather による歴史的な結果（1973, Ann. Math.）により初めてその重要性が認識されたとみなせる。そのように重要な問題ではあるが、Mather の上記論文以後は、この問題を取り上げた論文はさほど多くはない。Convex Integrand に対して制約条件付き構造安定性問題として問題設定を行い、肯定的結果を得ている本章の結果は、この重要な問題に対する数少ない情報の一つになっており、十分に意義のある結果と言える。

本論文の最終章である第 7 章では、本研究のまとめと今後の発展性について述べている。

以上のように、本論文では、ウルフ図形とその双対ウルフ図形の密接な関係について多角的に研究し、研究成果を高い完成度でまとめたものであり、十分な独創性のみでなく、新しい分野を切り開く可能性すらも持ち合わせている質の高い博士論文である。これまでの研究成果の公表に関しては、学術論文（正論文）４編（いずれも SCI ジャーナルに受理されており、博士論文に関連する論文)、出版済みの査読なし論文１編がある。

以上から、本論文は博士（学術）の学位論文として十分な価値を有すると審査委員全員一致して認めるものである。

注　論文及び審査結果の要旨欄に不足が生じる場合には、同欄の様式に準じ裏面又は別紙によること。