

教員養成系学部 to 所属する学生の微分における計算技能と概念理解の関係

教育デザインコース 数学領域
武者 尚志
教育学研究科
山本 光

1. 背景

現行の学習指導要領における高等学校数学科の目標には「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる.」(下線筆者)と示されており、数学における基礎的な概念の理解を深めることが前提として、それらを活用し判断する態度の育成を目指していることが分かる。

一方、教育課程実施状況調査や国際調査を受けて文部科学省(2006)が公表している算数・数学科における課題では、「基礎的な計算技能の定着について、低下傾向は見られなかったが、計算の意味を理解することなどに課題が見られた。」と指摘されている。つまり、先の目標の前提となる概念理解について、現在の高校生には弱点があるとの指摘がなされている。

さらに具体的な単元においても、塚原(2002)は「生徒は、微分積分法の計算はできるが意味が分からない」という問題点の指摘があった。「例えば、公式を適応して問題を解くとき、やっている計算の意味が理解できていない」といった微分や積分の学習についての問題点をあげている。この指摘から10年以上経てもなお、山口(2013)は「高校生は、微分学習において、単に与えられた数式に数字を当てはめて問題を解くといった公式の暗記と公式を適応する学習だけで終わっている。」との指摘を行っている。

なぜ、高校生の学習において、微分や積分の単元における計算技能は向上しているものの、その基礎となる概念理解が十分でないことが指摘され続けているのであろうか。

おそらく多くの研究者は、日本の教育制度に大学受験があり、そこでの能力として「微分の意味を理解するよりも多くの点数を取るための計算技能の向上が現場で指

導されている」と指摘するだろう。

もちろん我々も大学受験が大きく影響していることは、明らかであると考ええる。しかし、そこで思考を停止することなく、それらの奥に潜む構造を明らかにすることが、今後の微分積分の指導やカリキュラムの構築に資する基礎研究としての価値があると考えられる。

なぜならば、少子化の時代に入り、大学入試も大きく変化し、計算技能を重視する試験問題から、意味理解を重視する試験問題へと大きく様変わりしてきている。その証拠に、1999年度入試において、東京大学では三角関数における基礎公式である加法定理そのものを証明する問題が課された。これは計算技能や公式の暗記中心の学習ではまったく太刀打ちできず、三角関数および加法定理の概念を十分に理解していないと解けない問題である。

他方で、上記のような時代背景から、高校生を指導する立場の教員の意識の変容も要求されていることは容易に想像ができる。前述のとおり、今までは大学受験が計算技能を重視したものから、概念理解を重視したものへと変容したことにより、高等学校における学習指導要領やカリキュラムが変化してきている。つまり、教師自身も教示するスタイルの変容が必要となっている。

上記のことをふまえ、本研究において注目したいことは、「教員養成系の大学生は、計算技能重視の大学試験で入学し、その後の大学における学びを通して、高校生に対して概念理解重視の授業が行えるか」という疑問である。

もちろん予想される答えとして、学生自らの成功体験が、その後の学習スタイルおよび教示のスタイルに大きく影響するであろう。しかし、大学での学びでは多くの科目において概念理解の大切さや、それを小学生や中学生および高校生にどのように教示していくかを獲得する講義を受講することになっている。

よって、教員養成系大学と一般の大学生の比較によって、学生の計算技能および概念理解、そしてそれらを支える学習観をも調査することで、前述の「教員養成系の大学生は、計算技能重視の大学試験で入学し、その後の大学における学びを通して、高校生に対して概念理解重視の授業が行えるか」が明らかになると考えられる。

2. 目的

本研究の目的は、教員養成系大学生と一般大学生における単元「微分」での計算技能および概念理解の関係を明らかにする。さらに、学生の学習観とそれら2つの能力との関係から、指導の指針を探っていくことである。

3. 方法

3.1. 調査項目

本研究では、教員養成系大学生の微分における計算技能や概念理解を調査すること、およびその学生の学習観を調査することの2つを行った。

はじめに、微分に関する計算技能と概念理解をするために、図1および図2に示すような試験問題を考案した。計算技能については、高等学校数学ⅡおよびⅢの教科書から典型的な計算問題を3問抽出した。概念理解については、20年以上に渡って大学初年時の微分積分学を担当していた大学教員数名に対して、大学生がよく勘違いしている概念を聞き取り調査し、上位3つを取り上げた。

計算① 次の関数を微分しなさい

$$y = (2x - 5)^3$$

計算② 次の関数を微分しなさい

$$y = \frac{1}{2x + 3}$$

計算③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ の極限值を求めなさい

図1 計算技能の3問題

この概念理解問題は3問ともに、間違っている問題である。少々意地悪ではあるが、3つともに必ず大学の講義では注意する概念である。

次の命題があていられれば○を、間違ってれば×をつけ訂正しなさい

概念① 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続ならば $x=a$ で微分可能である

概念② 微分係数が0となる点では必ず極値をとる

概念③ 逆関数は元の関数の x と y を入れ替えたものである

図2 概念理解の3問題

次に学習観については、学習観や学習方略が組織的に研究されている寺西（2008）、市川ら（2009）、廣瀬ら（2012）の研究から、学習観、学習方略などの関係を調査しまとめている清水ら（2016）の先行研究に基づき調査項目の検討を行った。その結果、学習観尺度として8因子20項目の質問肢を用いて、「そう思う」、「まあそう思う」、「どちらともいえない」、「あまりそう思わない」、「そう思わない」の5件法で尋ねた。

具体的には、方略活用、勉強量、意味理解、丸暗記、思考過程重視、結果重視、失敗活用、環境重視の8つの因子について2から3問の質問肢が用意され、それぞれ1から5点の点数化を行い用いることとした。

また、市川ら（2009）により、結果、丸暗記、勉強量、環境重視は非認知主義的学習観として、失敗活用、思考過程、方略活用、意味理解は認知主義的学習観として、まとめられている。

3.2. 調査手順

調査対象として、本学の教育人間科学部の解析学Ⅰ受講者（以下、本学と示す）数学Ⅲ履修者16人および、比較対象として県内A大学（以下、一般と示す）数学Ⅲ履修者15人とした。調査期間は2016年4月下旬の1日の内、計算技能、概念理解および学習感に関する質問用紙を配布し、時間は30分間で行った。

4. 結果

4.1. 正答数の比較

はじめに、計算技能3問および概念理解3問について、それぞれ正解を1点、不正解を0点として得点化した。その3問の合計3点満点について比較した結果を表1に示す。本学は、合計16人中の平均値およびSD(標準偏差)を、一般は合計15人中の平均値およびSDを掲載し、さらに得点の平均値の差の検定を行った結果も示す。

表1 計算技能および概念理解3問の合計の比較

	本学		一般		t 値	p
	平均	SD	平均	SD		
計算技能	2.38	0.96	1.00	0.68	3.91	.001
概念理解	1.06	0.68	0.87	0.83	0.72	.478

ここで本学と一般の比較をするにあたり、人数がそれぞれ16人と15人が妥当であったかを検定力分析によって示す。検定力とは、「母集団において差があるときにサンプルから有意差があるという結果が得られる確率」のことで、0.8を基準として設定されている。また、Cohen(1992)は「0.8以下の検定力の場合には、第二種の誤り(実際に有意差があるのに有意差がないと判断してしまうケース)を犯す可能性が高くなる」と指摘している。

計算技能についての検定力は $d=1.69$ 、概念理解についての検定力は $d=0.25$ であった。計算技能の効果量は大きいため、サンプルサイズに問題はないと判断できるが、概念理解の効果量は小であった。

比較の結果、計算技能においては本学の得点が有意に高いことが示されたが、概念理解は本学と一般との間の得点に有意差がないことが示された。

次に、計算技能および概念理解のそれぞれの問題ごとにその正答率を比較した結果を表2に示す。さらに、各問において、合計人数における正答者数の比率の差の検定を行った結果も合わせて掲載する。

その結果、それぞれの問題ごとにおいて、計算技能については、本学の正答率は有意に高いことが示された。

表2 各問の正答率(%)

	本学	一般	p 値
計算①	87.5	46.7	*
計算②	75.0	13.3	**
計算③	75.0	40.0	*
概念①	31.3	20.0	n.s.
概念②	50.0	40.0	n.s.
概念③	25.0	26.7	n.s.

$p < 0.05$ *, $p < 0.01$ **, $p < 0.001$ ***

表2より、本学の学生の特徴として、計算技能①から③までの正答率は75%以上と大変高い傾向にあることが示されている。

一方で、概念理解①および③については、正答率が概念理解②と比較して低いことが示されている。もちろん一般の大学生と比較しても同じ傾向にあることから、微分の単元においては、概念理解①および③の問いが共通して弱点であることが示されている。

各問における回答者数の分布を見るための参考までにグラフを図3に掲載する。

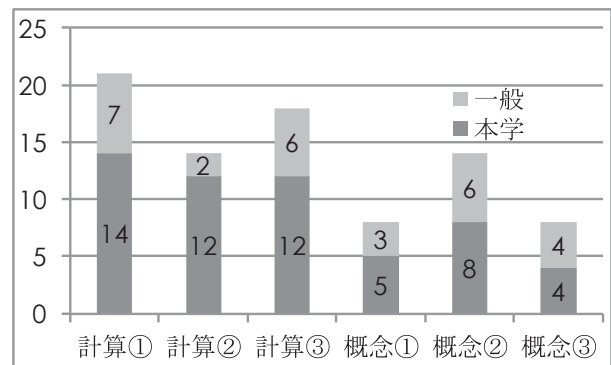


図3 各問の正答者数の分布

正答者数の分布(図3)より比較の結果、計算技能については、本学の学生の計算技能は高いことが分かり、一方の概念理解の一部には弱点があることが分かる。

4.2. 各問の相関係数

どの問題に正答する学生は、他のどの問題も正答するかという、各問の関係を見るために相関係数を求めた。本学の学生については、表3に示す。相関係数が検定の結果有意かつ0.4を上回るものを太字下線で表している。

その際、名義尺度同士の関係を見るため、ファイ係数を用いた。

表3 本学の各問の相関係数

	計算②	計算③	概念①	概念②	概念③
計算①	0.22	0.22	0.25	0	0.22
計算②	-	<u>0.66**</u>	0.07	<u>0.58**</u>	0
計算③		-	0.08	<u>0.58**</u>	0
概念①			-	0	-0.39
概念②				-	0
概念③					-

$p < 0.05$ *, $p < 0.01$ **, $p < 0.001$ ***

その結果、計算②と計算③の間にやや強い相関（0.66）が認められた。

さらに計算②と概念②にもやや強い相関（0.58）が認められ、また計算③と概念②にもやや強い相関（0.58）が認められた。

次に一般の学生についても同様に相関係数を求め表4に示した。

表4 一般の各問の相関係数

	計算②	計算③	概念①	概念②	概念③
計算①	0.42**	0.32**	-0.13	0.33**	0.04
計算②	-	0.08	-0.19	0.48**	-0.24
計算③		-	-0.07	0.17	-0.18
概念①			-	-0.04	0.45**
概念②				-	0.12
概念③					-

$p < 0.05$ *, $p < 0.01$ **, $p < 0.001$ ***

その結果、一般に学生おける各問の相関係数においては、計算①と計算②の間にやや強い相関（0.42）が認められた。

また、計算②と概念②の間にやや強い相関（0.48）が認められ、概念①と概念③の間にやや強い相関（0.45）が認められた。

以上から本学、一般における相関関係をそれぞれ図4、5に示す。

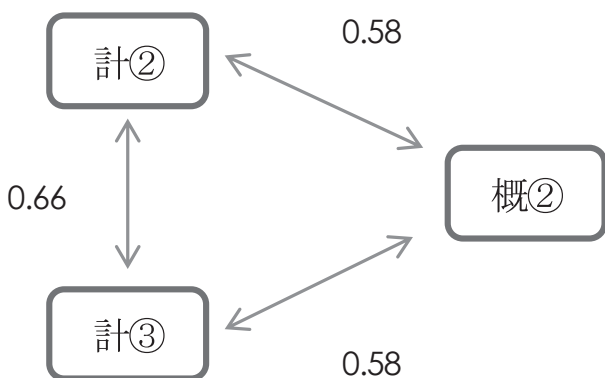


図4 本学の相関関係

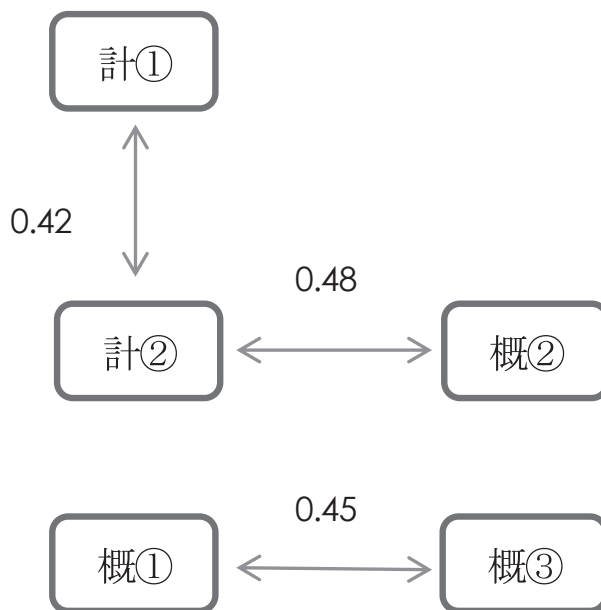


図5 一般の相関関係

図4より、概念②ができる人は計算②、計算③ができています。図5より、概念②ができる人は計算②ができ、計算②ができる人は計算①ができるということがわかる。本学一般ともに共通しているものは概念②であった。

4.3. 学習観の影響

学習観の8つの因子と、概念理解②の正答との関係を調べるために、判別分析の手法を利用し、どの学習感が影響を与えるか、その傾向を数量的に割り出した。

概念②の正答を1、不正答を0と点数化しそれを従属変数として、学習観の8つの因子を得点化しそれを独立変数として、表5に示した。

表5において、各問の縦方向の数値を比較し、絶対値が大きいものほど、従属変数に影響を与えているとみることができる。

また、判別率については58.1%であり、決して高いとは言えないが、50%以上であったために、ある程度説明ができていると判断し傾向としての比較を行った。

さらに、表中の太字下線で表しているところは、傾向として影響を与えている項目であり、符号は正ならば従属変数を高める方向へ影響し、負ならば低める傾向にあることを示している。

表5 本学，一般の概念②への影響

	概念②
方略活用	0.633
勉強量	-0.320
意味理解	-0.208
丸暗記	0.639
思考過程重視	0.686
結果重視	0.354
失敗活用	0.245
環境重視	-0.283

本学，一般の概念②による学習観について結果を示すと，思考過程重視の学習観が高く，一方で勉強量の学習観が低める傾向にあることが示される。

また，高める傾向にある学習観としては思考過程重視，丸暗記，方略活用の順に高いため，丸暗記の学習観をもっているでも概念②の正答率を上げることがわかる。

概念②を上げるための上位3つの学習観のどのような関係があるのかを確認するため，学習観の相関係数を求め，表6に示した。

表6 学習観の相関係数

	丸暗記	思考過程重視
方略活用	-0.434**	0.6**
勉強量	0.369*	-0.026
丸暗記		-0.444**

その結果，学習観の相関係数においては，方略活用と丸暗記の間でやや強い負の相関 (-0.434) が認められた。

また，丸暗記と思考過程重視の間でやや強い負の相関 (-0.444) が認められた。

以上から学習観の相関関係を図6にて示す。

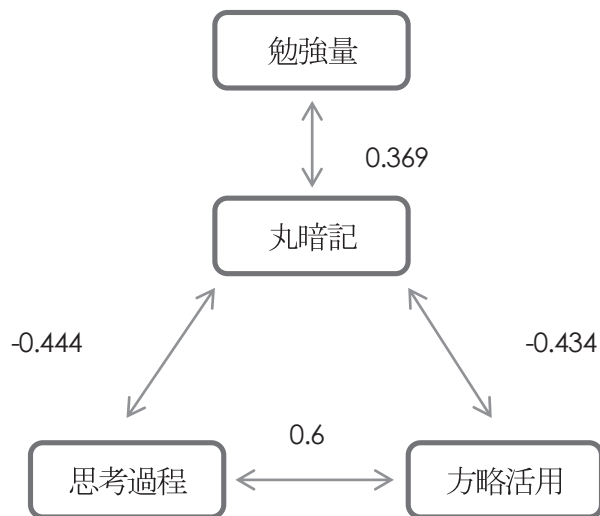


図6 学習観の相関関係

図6より，丸暗記と思考過程重視・方略活用の間には負の相関関係があるため，概念②ができる人には思考過程重視・方略活用をする人と丸暗記をする人の二つのパターンに分類されることがわかる。

5. 考察

本研究の目的は，教員養成系大学生と一般大学生における単元「微分」における計算技能および概念理解の関係を明らかにすることであった。

以下で結果を示す。

- 正答者数の比較を行い，本学の正答率について計算技能は有意に高いことが示されたが，概念理解の正答率は有意差がないことが示された。
- 各問の相関係数において，本学では計算②と計算③の間にやや強い相関 (0.66) が認められ，計算②と概念②にもやや強い相関 (0.58) が認められた。また計算③と概念②にもやや強い相関 (0.58) が認められた。
- 一般では各問の相関係数において，計算①と計算②の間にやや強い相関 (0.42) が認められた。さらに計算②と概念②の間にやや強い相関 (0.48) が認められた。また，概念①と概念③の間にやや強い相関 (0.45) が認められた。
- 学習観の影響について判別分析を行い，概念②を高める要因は，思考過程重視，丸暗記，方略活用の順に高いことが示され，勉強量が低めることがわかった。
- 学習観の相関係数を求め，思考過程重視と丸暗記の間にはやや強い負の相関 (-0.444)，方略活用と丸暗記の間にはやや強い負の相関 (-0.434) が認められた。以上の5つの結果が得られた。

結果について考察を行うと，本学および一般においても，計算技能・概念理解に関する学習観の要因に共通するものがあつた。しかし，本学のほうが一般に比べて計算技能はできているため，計算技能を高める要因としては受験偏差値が関わってくるのではないかと考えられる。

概念理解に関しては本学と一般との間に有意な差はなかったため，国際調査にもあるように，教員志望の者でも計算技能は出来ているが，概念理解に課題があるという事が改めて確認することができたが，検定力が低かったためサンプルサイズが足りなかったのではないかと考えられるため，今後はサンプルサイズを大きくして調査をしていきたいと考える。

本稿における目的として計算技能と概念理解についての関係を調べることであった。相関関係でみると、本学は計算②と概念②、計算②と概念③の間に、一般では計算②と概念②、計算①と計算②、概念①と概念③の間に相関関係があることが認められた。

本学と一般における共通してでてきているものは概念②であり、概念②を指導することにより計算技能の上昇が考えられる。逆に、概念①と③を指導することにより概念理解の強化を図るのもよいと考えられる。

また、概念②を上げる学習観の要因として思考過程重視、丸暗記、方略活用があった。概念②ができる人の特徴は思考過程重視・方略活用をする人、丸暗記をする人の二つのパターンがあり、その間には負の相関があった。

以上のことから、丸暗記のみではなく思考過程重視、方略活用の学習観を上げ、その結果概念②が上がり、概念②ができると計算技能もできるという関係にあるため、微分分野では思考過程重視、方略活用を上げる授業展開、例えば教師が教え込む授業ではなく、一つの問題に対して答えだけではなく、生徒と考えながらの授業や、定義を正しく理解し自分のものにすること、計算とその意味をセットで学ぶ授業等が良いのではないかと考える。

教員養成系の大学生は、「計算技能重視の大学試験で入学し、その後の大学における学びを通して、高校生に対して概念理解重視の授業が行えるか」については、現段階ではすべての学生が行えると考えるのは困難であることが分かった。一方で、計算技能と概念理解の関係性や、学習観との関係からどの概念を指導するか、どのような学習観を持つように指導するかが示されたので、大学における学びにおいて、思考過程重視や方略活用の学習観が持てるようになることにより、高校生に対して概念理解重視の授業が行えるようになるのではないかと考える。

6. 今後の課題

本稿では学習者の特徴として、学習観のみを対象とし調査したが、学習者の特徴は他に学習動機や学習方略などが研究されているため、今後は他の学習者の特徴との関係についても調査する必要がある。

さらに、調査対象の拡大を図り、それらを踏まえて具体的な教授法についても調査研究を行うことで「概念理解重視の授業」への指針が得られるであろう。

引用・参考文献

- 清水 優菜, 守谷 真一, 山本 光 (2016)『数学の学習における学習動機と学習観, 学習方略, 問題解決方略の関係: 大学生を対象とした分析 (ICT を活用した学習支援環境・基盤 / 一般)』 日本教育工学会研究報告集 JSET16 (1): 67-74
- Cohen J. (1992) A power primer.: Psychol Bull. 1992 Jul; 112 (1): 155-9
- 塚原 久美子 (2002).『数学史をどう教えるか』, 東洋書店: pp.105
- 廣瀬 友介, 中本 敬子, 蛭田 政弘 (2013)『数学学習における学習観と学習方略の関係—大学生を対象とした分析—』 文教大学教育学部紀要 (46): 45-56
- 文部科学省 (2006) 算数・数学科の現状と課題, 改善の方向性 (検討素案) 中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会 (第 43 回 (第 3 期第 29 回)) 議事録・配付資料 [資料 5 - 1]
- 文部科学省 (2009)『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』 実教出版: pp.16
- 山口 昌広 (2013)『「微分する」ことの意味理解に関する一考察』 上越教育大学数学教室 数学教育研究: 73-180