スポットサイズの高精度近似式の提案とその近似精度の検討

正 員 國分 泰雄[†] 正 員 田村 修一[†]

Precise Formula for Calculating Spot Size in Optical Waveguides
and Its Accuracy

Yasuo KOKUBUN[†] and Shuichi TAMURA[†], *Members*

あらまし スポットサイズは導波モードの横方向電界分布の広がり具合を表す基本的パラメータであり、異種導波路要素子間の接続損を見積る場合などに用いられる。従って、これを正確に求めるのは、多数の導波路要素子を含む光集積回路の設計で非常に重要である。そこで本研究では高精度にスポットサイズを求めることを目的とし、導波光の横方向電界分布をガウスビーム波の電界分布で最小2乗法的に最良近似する条件よりスポットサイズを定義した。そして、光導波路内伝搬光の基本モード横方向電界分布をエルミート・ガウス関数で直交関数展開し、その0次展開係数が最大となる条件から高精度で数値計算に適した近似式を導出した。本式はフーリエ変換で式の形が変わらず数学的妥当性を有する。更に本研究の近似式を用いると、導波路軸ずれ接続損をガウスビーム波の軸ずれ接続損で最良近似できることも示した。本論文では3層平板導波路のTEモードを例にとり、スポットサイズの定義値に対する近似精度を検討した。本近似式は逐次近似で高精度にスポットサイズを求められるが、実際に逐次近似を行い精度が飛躍的に向上し、従来用いられる式よりも高精度であることを明らかにした。

キーワード スポットサイズ, 光導波路, 軸ずれ損特性, エルミート・ガウス関数, 最小2乗近似

1. ま え が き

近年、各種導波路形光素子の高集積化が進みつつあり、特に導波路形光素子の小形化を目的とした高屈折率微小コア導波路や半導体レーザなどの微小素子と、光ファイバなどの比較的大きなスポットサイズをもつ素子とを接続するためのスポットサイズ変換器^{(1)~(4)}も開発されるに至っている。このような異種導波路要素子を接続した場合の接続損を見積るための基本的パラメータとして、スポットサイズが用いられる。従って、スポットサイズを正確に求めることは、特に多数の導波路要素子を集積化した光集積回路の設計において非常に重要になる。

スポットサイズは光ビームの広がりを表す基本パラメータであり、ガウスビーム波においては、強度が最大値(中心値)の $1/e^2$ となる半幅で定義される(光ファイバにおいては、全幅あるいは直径をもってモードフィールド径と呼びならわしており、CCITT等の規格にも用いられているが、ここではより一般の光ビームに対し

ても用いられる“スポットサイズ”を用いることにする。また、強度が $1/e$ となる半幅をもってスポットサイズを定義する本も見受けられるが、JIS規格や国際規格においては、電界の $1/e$ を用いている)。実際の光導波路内伝搬光の界分布はガウス分布とは異なるので、基本モードの電界分布をガウス分布で近似することによってスポットサイズは算出される。この界分布よりスポットサイズを算出する近似式として、Villuendasによる式⁽⁵⁾(光ファイバで広く用いられるPetermann IIの式⁽⁶⁾を座標変換することにより容易に導出できる)、電界分布の2次モーメントを用いた式⁽⁷⁾等が提案されている。また、単に強度分布の $1/e^2$ 半幅がスポットサイズとして用いられる場合も多い。しかしながら、本来はガウス形とは異なるビーム波や導波光のスポットサイズをいかに定義するのが最も適切(物理的および数学的に)であるかの議論はなされておらず、従ってスポットサイズの定義もなされてはいなかった。光ファイバにおいて用いられるPetermann IIの式でさえ、波動方程式の停留表現式から抽出されたものであり、その数学的必然性は証明されていない。更に、ガウス分布は回折に伴うフーリエ変換でその形が変化しないのに対して、これらの近似式はフーリエ変換によって形が変わるので、ガウス分

[†] 横浜国立大学工学部電子情報工学科, 横浜市
Faculty of Engineering, Yokohama National University, Yokohama-shi, 240 Japan

布への近似式としては数学的妥当性に欠ける。

そこで我々は、一般的なビーム波に対して高精度にスポットサイズを近似することを目的として、スポットサイズの新しい近似式を提案する。まず単一モード光導波路の基本モードの(またはビーム光のビームウェストにおける)1次元電磁界分布を任意のスポットサイズ w をもつエルミート・ガウス関数によって直交関数展開する。そして、最小2乗法的にガウス分布で最も良く近似する条件よりスポットサイズを定義した。更に、この条件を用いてスポットサイズの新しい近似式を導出した。また、本研究の近似式を用いると、導波路軸ずれ接続損特性もまた、ガウスビーム波の軸ずれ接続損特性で最も良く近似されることを示した。

以下では、式の導出過程および近似精度の検討結果について報告する。なお、チャネル導波路の出射光のような2次元界分布に対しては、ガウス形界分布は x 方向と y 方向に変数分離できるので、本論文では1次元界分布についてのみ検討した。

2. スポットサイズの新しい近似式

この章では、導波光の電界分布をガウスビーム波の電界分布によって最良に近似する条件より、スポットサイズの高精度近似式を導出する。

2.1 導出過程

光導波路の基本モードの1次元横方向電磁界分布を $f(x)$ とおく。このとき、その光電力が

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx = 1 \quad (1)$$

となるように規格化されているとする。この $f(x)$ を次に示すようにスポットサイズ w をもつエルミート・ガウス関数で直交関数展開する。

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i N_i H_i \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] \quad (2)$$

但し、 C_i は展開係数、 N_i は規格化定数、 $H_i(x)$ はエルミート多項式であり、それぞれ以下のように表される。

$$C_i = N_i \int_{-\infty}^{\infty} H_i \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx \quad (3)$$

$$N_i = \frac{1}{\left[2^i i! w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right]^{1/2}} \quad (4)$$

また、式(1)およびエルミート・ガウス関数の正規直交性より、次式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i^2 = 1 \quad (5)$$

本研究では、2次までの展開によって界分布を近似することにし、更に界分布が軸対称(1次の展開係数 $C_1 = 0$) の場合を考える。

ここで、 N 次項までで式(2)の直交関数展開を打ち切った近似関数を $f_N(x)$ とする。この $f_N(x)$ と真の関数 $f(x)$ との2乗誤差

$$I_{Field}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f_N(x)]^2 dx \quad (6)$$

を考える。この式(6)を最小とする展開係数 C_i は w を一定とした場合には、展開の打ち切り回数とは関係なく式(3)で与えられる。従って、正規直交関数による展開は N 次項までで打ち切ったとしてもその次数での最小2乗近似を与える。ここで、式(6)を展開すると次式となる。

$$I_{Field}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} [f_N(x)]^2 dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_N(x) dx \quad (7)$$

ところで、正規直交性より

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_N(x)]^2 dx = \sum_{i=0}^N C_i^2 \quad (8)$$

が成り立つ。更に、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_N(x) dx &= \sum_{i=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(x) C_i N_i H_i \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] dx \\ &= \sum_{i=0}^N C_i^2 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。従って、式(1)も合わせると式(7)は次式となる。

$$I_{Field}(w) = 1 - \sum_{i=0}^N C_i^2 \quad (10)$$

式(5)より、

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2 \geq \sum_{i=0}^N C_i^2 \geq 0 \quad (11)$$

であるので、 $I_{Field}(w)$ を最小とするには、 $\sum_{i=0}^N C_i^2$ を最大とすることが条件となる。

ガウス分布はエルミートガウス関数の0次項である。従って界分布をガウス分布で最小2乗近似するには、 C_0 のみが必要であり、 $I_{Field}(w)$ を最小とするには、 C_0^2 すなわち C_0 を最大(1に近づく)とすることが条件となる。つまり、 C_0 を最大とするときに導波路の界分布はガウス分布に最良に近似される。従って、本論文では C_0 が最大となる w をスポットサイズの定義として提案する。 C_0 は、

$$C_0 = \frac{1}{w^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} \right]^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx \quad (12)$$

で表される。具体的に式(12)を最大とする条件すなわち

$$\frac{\partial}{\partial w} C_0 = 0 \quad (13)$$

を計算することによって、

$$w = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx} \right]^{1/2} \quad (14)$$

が導かれる。上式が本論文で提案するスポットサイズの近似式である。ところで、 C_0 が最大となるときに $C_2 = 0$ であることは容易に証明することができる。 C_2 は、

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2} w^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} \right]^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{x}{w} \right)^2 - 1 \right\} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx \quad (15)$$

であるので、 $C_2 = 0$ とおくと簡単に式(14)が導出される。逆に、式(14)を用いてスポットサイズを求めると、 C_0 を最大に、 C_2 を 0 にすることになる。

式(14)は右辺にも w を含むので、このまま直接用いることはできない。そこで、スポットサイズを求めることは元来 $f(x)$ をガウス関数で近似する作業であるので、右辺にあるガウス関数を

$$\exp \left[- \left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] \simeq f(x) \quad (16)$$

と近似して式(14)に代入すると次式が得られる。

$$w = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx} \right]^{1/2} \quad (17)$$

この式(17)は、2 次モーメントによる近似式⁽⁷⁾と同じである。しかしながら、本研究の式(14)は、式(17)を 0 次近似として逐次近似によって近似精度を上げることが可能である。すなわち式(17)よりスポットサイズを求めてこれを w_0 とおき、式(14)の右辺に代入する。すると、

$$w_1 = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[- \left(\frac{x}{w_0} \right)^2 \right] f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{w_0} \right)^2 \right] f(x) dx} \right]^{1/2} \quad (18)$$

によって 1 次近似のスポットサイズ w_1 が求められる。これを式(18)の右辺の w_0 に再び代入して逐次近似をす

図1 近視野像と遠視野像との座標関係
Fig. 1 Relation between NFP and FFP coordinates.

ることによってより正確にスポットサイズを計算することができる。これが本近似式の特長である。

2.2 近視野像と遠視野像での近似式の関係

一般に導波光の強度分布は近視野像 (NFP) よりも遠視野像 (FFP) のほうが測定しやすい。従って遠視野像からスポットサイズを求める近似式も必要である。そこで図1のように座標系を仮定して、式(14)をフーリエ変換して遠視野像に対応する式を求めると、次式が得られる。

$$W = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \exp \left[- \left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right] F(\Omega) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right] F(\Omega) d\Omega} \right]^{1/2} \quad (19)$$

但し、 $F(\Omega)$ は $f(x)$ のフーリエ変換、 $\Omega = k_0 x' / z$ 、 $k_0 = 2\pi/\lambda$ 、 x' は遠視野像上の座標、 z は導波路の出射端から遠視野像までの距離、 W は遠視野像でのスポットサイズである。また、 $W = 2/w$ の関係がある。

式(14)と(19)を比較すると、本研究の近似式はガウス分布と同様にフーリエ変換しても全く同じ形の式で表されることがわかる。表1に本研究の式と共に Villuendas による近似式、2 次モーメントによる近似式の近視野像および遠視野像における式をまとめて示す。本研究の近似式を除くと近視野像における式と遠視野像における式とで形が変わってしまい、ガウス分布への近似式としては不十分である。この点からも、本研究の近似式は数学的に妥当である。なお、Villuendas の近視野像における近似式をフーリエ変換すると 2 次モーメントの式になり、また 2 次モーメントの近視野像における近似式は遠視野像では Villuendas の近似式の形になる点は、互いに双対の関係になっていて興味深い。

式(19)についても右辺に W を含んでいるので、近視野像における式と同様に

表1 各近似式の NFP, FFP における式の形

近 似 式	NFP	FFP
Villuendas	$w = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(x)}{dx} \right\}^2 dx} \right]^{1/2}$	$W = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 F(\Omega) ^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) ^2 d\Omega} \right]^{1/2}$
2 次モーメント	$w = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx} \right]^{1/2}$	$W = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) ^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \left \frac{dF(\Omega)}{d\Omega} \right ^2 d\Omega} \right]^{1/2}$
本 研 究	$w = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[-\left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{x}{w} \right)^2 \right] f(x) dx} \right]^{1/2}$	$W = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \exp \left[-\left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right] F(\Omega) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right] F(\Omega) d\Omega} \right]^{1/2}$

$$\exp \left[-\left(\frac{\Omega}{W} \right)^2 \right] \approx F(\Omega) \quad (20)$$

と近似し、式(19)に代入すると次式が得られる。

$$W = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \{F(\Omega)\}^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \{F(\Omega)\}^2 d\Omega} \right]^{1/2} \quad (21)$$

この式(21), (19)を用いて近視野像の場合と同様に逐次近似によってより正確な値を求めることができる。

2.3 導波路接続損の表現式

ここで、図2に示すように異なるスポットサイズをもつ異種光導波路を、 δ だけ軸ずれさせて接続する場合を考える。導波路1の横方向電界分布を $f_1(x)$ 、導波路2の横方向電界分布を $f_2(x-\delta)$ とし、それぞれ式(1)のように規格化されているとすると、結合効率 η は次式で表される。

$$\eta(\delta) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x-\delta) dx \right]^2 \quad (22)$$

この式(22)に式(2)によって展開した界分布を代入し、2次までの項をとって積分を実行すると次式となる。但し、以後の式において $w^{(1)2} + w^{(2)2} = A$, $w^{(1)} w^{(2)} = B$ とおき、上付き添字(1)は導波路1、上付き添字(2)は導波路2をそれぞれ表すとする。

$$\begin{aligned} \eta(\delta) = & \exp \left[-\frac{2\delta^2}{A} \left[\frac{2B}{A} \right] \left[C_0^{(1)} C_0^{(2)} \right. \right. \\ & + \left(\frac{6B^2}{A^2} - \frac{1}{2} \right) C_2^{(1)} C_2^{(2)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{w^{(1)2} - w^{(2)2}}{A} \right) (C_0^{(1)} C_2^{(2)} - C_2^{(1)} C_0^{(2)}) \\ & \left. \left. + \frac{2\sqrt{2}}{A^2} \left(A - \frac{12B^2}{A} \right) C_2^{(1)} C_2^{(2)} \right] \delta^2 \right] \end{aligned}$$

図2 スポットサイズの異なる二つの導波路の軸ずれ接続 (δ : 軸ずれ量, $f_1(x)$, $f_2(x-\delta)$: 電界分布)

Fig. 2 Buttjointing of waveguide #1 and waveguide #2 with offset δ . ($f_1(x)$ and $f_2(x-\delta)$ are field profiles.)

$$\begin{aligned} & + w^{(2)2} C_0^{(1)} C_2^{(2)} + w^{(1)2} C_2^{(1)} C_0^{(2)} \Big) \delta^2 \\ & + \frac{8B^2}{A^4} C_2^{(1)} C_2^{(2)} \delta^4 \Big]^2 \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)は、異種光導波路の軸ずれ接続特性が展開係数ならびにスポットサイズを用いて近似できることを表している。つまり、従来は光導波路の軸ずれ損特性をスポットサイズのみによって表す試みがなされてきたが、式(23)は更に展開係数を用いるのが数学的に妥当であることを意味している。しかしながら、本論文ではスポットサイズの高精度近似式に主眼を置くので、この軸ずれ損特性の近似精度については、別の機会にゆずる。

導波路1と導波路2の電界分布が等しい($f_1(x) = f_2(x)$)場合は、式(23)の軸ずれ損特性は次式のように簡単になる。

$$\begin{aligned}
\eta(\delta) = & \exp \left[- \left(\frac{\delta}{w} \right)^2 \right] \left[(C_0^2 + C_2^2)^2 + 2(C_0^2 \right. \\
& + C_2^2)(\sqrt{2}C_0C_2 - 2C_2^2) \left(\frac{\delta}{w} \right)^2 \\
& + \{ (C_0^2 + C_2^2)C_2^2 + (\sqrt{2}C_0C_2 - 2C_2^2)^2 \} \left(\frac{\delta}{w} \right)^4 \\
& + (\sqrt{2}C_0C_2 - 2C_2^2)C_2^2 \left(\frac{\delta}{w} \right)^6 \\
& \left. + \frac{C_2^4}{4} \left(\frac{\delta}{w} \right)^8 \right] \quad (24)
\end{aligned}$$

この式(24)がガウス分布の軸ずれ接続損特性

$$\eta_G(\delta) = \exp \left[- \left(\frac{\delta}{w} \right)^2 \right] \quad (25)$$

を最良に近似する場合を考える。そこで、式(24)と式(25)の2乗誤差が最小となるように、つまり

$$I_{\text{splice}}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(\delta) - \eta_G(\delta)]^2 d\delta \quad (26)$$

の値が最小となる条件を求める。2.1において、スポットサイズを式(14)から求めることによって C_0 が最大、すなわち1に最も近づき、更に $C_2=0$ になることを示した。そこで、式(24)で $C_2=0$ とおくと、 C_2 に関する項はすべて消え、以下の式となる。

$$\eta(\delta) = \exp \left[- \left(\frac{\delta}{w} \right)^2 \right] C_0^4 \quad (27)$$

$I_{\text{splice}}(w)$ が最小となることは結局 C_0 が最大となることより達成される。従って、導波モードの電界分布 $f(x)$ をガウス分布で最良近似することにより、軸ずれ損特性もガウス分布の軸ずれ損特性で最良近似できることになる。すなわち、本論文で提案したスポットサイズの近似式を用いることによって、界分布についても軸ずれ損特性についても共にガウス分布に最良に近似できる。

3. 近似精度の検討

2.において我々が提案するスポットサイズの近似式について述べた。ここでは、3層平板導波路のスポットサイズを計算し、その近似精度について実際にどの程度有効であるかを検討する。

3.1 他の近似式との比較

ここではいくつかのスポットサイズの近似式よりスポットサイズを求め、それぞれ定義値と比較検討する。スポットサイズの定義値は、さきに述べたように0次の展開係数 C_0 (式(12))を最大とする条件で与えられる。本研究では、式(12)を最大とする w を2分法によって

求めた。数値積分の精度は 10^{-14} 程度(14けた)、2分法によるけた打ち切り精度は 10^{-9} 程度(9けた)である。

まず、本節では、逐次近似を行わない式を用いることにする。本論文では、逐次近似の回数として I を用いる。すなわち、逐次近似を行わない場合は $I=0$ である。

比較する近似式は

[1] 界分布の $1/e$ 半幅 (w_e):

$$f(w_e) = f(0)/e \quad (28)$$

[2] Villuendas の近似式⁽⁵⁾ (w_v):

$$w_v = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\}^2 dx} \right]^{1/2} \quad (29)$$

[3] 電界分布の2次モーメントを用いた近似式⁽⁷⁾ (w_q):

$$w_q = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx} \right]^{1/2} \quad (30)$$

[4] 本研究の近似式 ($I=0$) (w_K):

$$w_K = \left[\frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \{f(x)\}^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx} \right]^{1/2} \quad (31)$$

但し、電界分布の2次モーメントを用いた近似式は本研究の0次 ($I=0$) の逐次近似式と全く同じ形であるので、以後の図においては両者は同じ曲線である。

対称3層平板導波路の電界分布(ここではTEモードについてのみ扱う)を式(28)~(31)の各近似式に代入し、規格化周波数 V ($V = k_0 a n_1 \sqrt{2\Delta}$: a はコア半幅, n_1 はコアの屈折率, n_2 はクラッドの屈折率, $\Delta = (n_1^2 - n_2^2)/2n_1^2$ はコアとクラッドの比屈折率差)と規格化伝搬定数 b ($b = [(\beta/k_0)^2 - n_2^2]/[n_1^2 - n_2^2]$: β は伝搬定数であり、分散関係を用いて V 値より求められる)を用いてスポットサイズを表現すると、それぞれ以下になる。但し、スポットサイズはコア半幅で規格化している。

$$\frac{w_e}{a} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{V\sqrt{b}} [1 + \ln\{\cos V\sqrt{1-b}\}] & (w_e > a) \\ \frac{1}{V\sqrt{1-b}} \cos^{-1} \frac{1}{e} & (w_e \leq a) \end{cases} \quad (32)$$

$$\frac{w_v}{a} = \left[\frac{V + \frac{1}{\sqrt{b}}}{V^3(1-b)} \right]^{1/2} \quad (33)$$

$$\frac{w_K}{a} = \frac{w_a}{a}$$

$$= 2 \left[\frac{2b\sqrt{b}(1-b)V^3 + 6b(1-b)V^2}{6V^2(1-b)b(V\sqrt{b}+1)} \right]^{1/2} \quad (34)$$

スポットサイズの定義値としては、先に述べたように0次の展開係数 C_0 (式(12)) を最大とする条件より求められる。この定義値と式(32)~(34)より求められるスポットサイズを比較した結果を図3、図4に示す。図3は V 値の小さい場合で、図4は V 値の大きい場合である。それぞれの図で(a)は V 値に対するコア半幅で規格化したスポットサイズ(左の縦軸)および定義値との相対誤差(右の縦軸)を示し、図(b)は V 値に対する0次の展開係数 C_0 を示す。スポットサイズと C_0 が共に定義値と近ければ精度が良いことになる。なお、図3、図4中に本研究の近似式の $I=1$ の場合も示してあるが、これについては次節で議論する。

これを見ると、電界の $1/e$ 幅による近似式はほぼ全範囲にわたって最も誤差が大きく、精度が低いので不適当であるのがわかる。図4(b)を見ると、 $1/e$ 近似が最も精度が高くなる V 値は、 C_0 が最大値をとる付近であるのがわかる。 C_0 が最大値をとるということは電界分布が最もガウス分布に近いことを意味しているので、このときに電界の $1/e$ 幅もほぼガウスビームのスポットサイズに近くなるのは当然と考えられる。このときの V 値は2.293であり、 C_0 は0.99952、 w/a は1.144である。

Villuendas の近似式は図3、図4より、単一モード領域と多モード領域の境界 ($V=\pi/2$) 前後においてはここで比較している四つの近似式の中で最も精度が高いが、これ以外の領域では精度が低い。つまり、一般的な単一モード導波路については誤差2~3%程度の精度でスポットサイズを求めることができるが、コア幅を小さくすることによりスポットサイズを大きくするスポットサイズ拡大導波路のようにコアへの光閉込めの弱い (V 値が小さい) 導波路や、ARROW-B⁽⁸⁾ (電界分布が V 値の大きい3層平板導波路にかなり近い) のように光閉込めの強い (V 値が大きい) 導波路については誤差が大きくなってしまう。

$I=0$ の本研究の近似式は V 値のほぼ全領域にわたって他の式より精度が高く、Villuendas の近似式の精度が高い領域についてもそれほど差があるわけではない。しかしながら、全体にみると誤差は数%あり、有効数字2けた程度の精度しか得られず、更に精度が要求される場合には不十分である。

(a) Normalized spot size and error vs. V

(b) Expansion coefficient vs. V

図3 スポットサイズの近似式の精度比較 (V 値が小さい場合)

Fig. 3 Comparison of various spot size definitions for small V value.

本節で比較した三つの式全体の傾向として、図4(b)で C_0 が最大となる V 値すなわち界分布が最もガウス形に近くなる付近で最も精度が高く、ガウス形よりずれるに従って精度が低くなるのがわかる。

なお図3(a)、図4(a)より、ある決まった屈折率差の導波路において最小のスポットサイズを与える V 値を求めることができる(付録参照)。このときの V 値は1.185であり、コア半幅で規格化したスポットサイズは1.856である。これより対称3層平板導波路においては、導波路の材料が決まると、スポットサイズを最小とするコア幅およびそのときのスポットサイズが自動的に決まる。

3.2 逐次近似の有効性

前節で、 $I=0$ の本研究の近似式でも精度は 10^{-2} 程度

(a) Normalized spot size and error vs. V

(b) Expansion coefficient vs. V

図4 スポットサイズの近似式の精度比較
(V 値が大きい場合)

Fig. 4 Comparison of various spot size definitions for large V value.

までしか得られないことを明らかにした。しかしながら、本研究の近似式は逐次近似によってより高精度にスポットサイズを求めることができる特長を有している。本節ではこの逐次近似による精度を検討する。

逐次近似法については2.1でも述べたが、実際には式(18)で求めた w_1 (1次近似) を再び右辺に代入し、この作業を何回か繰り返し行うのである。繰返し回数の目安は、後で説明する図6を参照すればよい。

ここで、逐次近似によって実際にスポットサイズの誤差がどの程度改善されるかを確かめる。図5に、逐次近似の回数とコア半幅で規格化されたスポットサイズの誤差の関係を示した。ここでは、 $V=0.7, 1.2, 1000$ の場合について示した。図5からわかるように、近似回数を増やすにつれて規格化誤差が小さくなることが

図5 逐次近似の回数に対する規格化スポットサイズの誤差
($V=0.7, 1.2, 1000$)

Fig. 5 Error in normalized spot size vs. number of successive approximation. ($V=0.7, 1.2, 1000$)

わかる。従って、逐次近似によって十分高精度にスポットサイズを求めることができる。

図6に、ある精度が必要なときその精度を満足するには何回逐次近似を行えばよいか示した。ここでは、相対誤差が 10^{-5} 以下、 10^{-4} 以下、 10^{-3} 以下の各場合について示した。この図から明らかなように、有効数字5けたまでの精度が必要な場合にも、23回以下の近似回数で広範囲に十分な精度が得られることがわかる。

ここで再び図3、図4に戻ると、これらの図には前節で述べたように $l=1$ の場合の曲線も示してある。これらの図を見ても明らかなように、わずか1回逐次近似を実行するのみでかなり精度が改善され、他のどの近似式よりも高精度になることがわかる。更に図6の誤差が 10^{-3} になる程度の近似回数で、図3、図4の線形目盛では定義値の曲線と区別がつかなくなるほど高精度になる。

以上より、本研究の近似式は逐次近似によって広範囲にかつ高精度にスポットサイズを求めることができる。

3.3 スポットサイズの位置での電界強度の減衰割合

最後に、スポットサイズの位置において電界がその最大値に比べてどの程度減衰しているかを検討する。

ある V 値に対するスポットサイズ w を求め、その位置における電界強度 $f(w)$ が最大値 $f_{\max}$ のどの程度の割合になっているかを求めた。その結果を図7に示す。本研究の逐次近似20回後の値は定義値の曲線と重なっている。なお参考までに他の近似式より求めた結果も同時に示す。図7より、実際には $1/e$ よりかなりずれて

(a) Small V value (b) Large V value図6 規格化スポットサイズの誤差が 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} 以下になる逐次近似回数Fig. 6 Required number of successive approximation to get accuracy of normalized spot size less than 10^{-5} , 10^{-4} and 10^{-3} .

いることがわかる。 V 値が大きくなるにつれて $f(w)/f_{\max}$ は単調に増加して 0.4494 に漸近する。スポットサイズが等しい導波路であっても V 値が異なれば、必ずしもスポットサイズの位置で電界強度が等しくはない(つまり界分布が一致しない)ことがわかる。

4. む す び

本研究では、光導波路伝搬光の電磁界分布をエルミート・ガウス関数によって直交関数展開し、これをガウスビーム波の界分布を最も良く近似する条件からスポットサイズを定義し、具体的に数式化して新しい近似式を導出した。更に、導波路軸ずれ損をこの展開式で近似して本研究の近似式を用いると、これをガウスビーム波の軸ずれ損で最も良く近似することも明ら

(a) Small V value (b) Large V value図7 スポットサイズの位置での電界の最大値に対する割合
Fig. 7 Normalized field amplitude at the point of spot size.

かにした。この近似式は、逐次近似を実行することによってより高精度にスポットサイズを近似できる特長がある。そしてこの近似式がフーリエ変換によって形が変化しないことを示した。

更に、3層平板導波路の TE モードについてスポットサイズの定義値を 0 次の展開係数 C_0 を最大とする条件より求め、他のいくつかの近似式と共に定義値との精度を検討した。その結果、電界分布の $1/e$ 半幅、Villuendas による近似式、電界分布の 2 次モーメントを用いた式および逐次近似を実行しない場合の本研究の近似式については近似精度が十分でないことを示した。本研究の近似式を逐次近似したところ、近似回数を増すにつれて近似精度が高くなり、逐次近似が有効であることを示した。逐次近似回数 23 回以下で幅広い範囲で有効数字 5 けた程度の精度が得られる。実際には、1 回の逐次近似でかなりの改善効果がみられ、他の

近似式より精度が良くなる。本研究の近似式を逐次近似することによって幅広い範囲で非常に高精度にスポットサイズを求められることを明らかにした。

今後は、異種光導波路の軸ずれ損に関して検討し、本論文中に示した近似式の近似精度を軸ずれ損特性の点からも明らかにしてゆく。更に、電界分布の非対称性の大きな導波路についても検討が必要である。

謝辞 日ごろ御世話になる東京工業大学伊賀健一教授、本学土岐政弘教授、都築泰雄教授に感謝する。

文 献

- (1) Yamaguchi N., Kokubun Y. and Sato K.: "Low loss spot size transformer by dual tapered waveguides (DTW-SST)", IEEE J. Lightwave Technol., 8, 4, pp. 587-593 (April 1990).
- (2) Kokubun Y., Tamura S. and Kondo T.: "Spot size transformer with a type-B antiresonant reflecting optical waveguide", Opt. Lett., 17, 24, pp. 1746-1748 (Dec. 1992).
- (3) Kasaya K., Mitomi O., Naganuma M., Kondo Y. and Noguchi Y.: "A simple laterally tapered waveguide for low-loss coupling to single-mode fibers", Photonics Tech. Lett., 5, 3, pp. 345-347 (March 1993).
- (4) Yoshimoto N., Kawano K., Takeuchi H., Kondo S. and Noguchi Y.: "Efficient coupling semiconductor waveguide spot-size converter with a double core structure", 4th Optoelectronics Conf., Chiba, PD-5 (July 1992).
- (5) Villuendas F., Calvo F. and Marqués J. B.: "Measurement of mode field radius in axially nonsymmetrical single-mode fibers with arbitrary power distribution", Opt. Lett., 12, 11, pp. 941-943 (Nov. 1987).
- (6) Petermann K.: "Constraints for fundamental-mode spot size for broadband dispersion-compensated single mode fibers", Electron. Lett., 19, 18, pp. 712-714 (Sept. 1983).
- (7) Hayata K., Koshiba M. and Suzuki M.: "Modal spot size of axially nonsymmetrical fibers", Electron. Lett., 22, 3, pp. 127-129 (Jan. 1986).
- (8) Baba T. and Kokubun Y.: "New polarization-insensitive antiresonant reflecting optical waveguide (ARROW-B)", IEEE Photon. Technol. Lett., 1, 8, pp. 232-242 (Aug. 1989).

付 録

スポットサイズを最小とする V 値

図3(a), 図4(a)より (w/a) を V の関数であると見なすことができ,

$$\frac{w}{a} = f(V) \quad (\text{A} \cdot 1)$$

とおくことができる。上式を変形し

$$w = af(V) \quad (\text{A} \cdot 2)$$

とおく。この式(A・2)を V について微分して0とおくと、スポットサイズが最小となる条件は以下で与えられる。

$$\frac{\partial a}{\partial V} f(V) + a \frac{\partial f(V)}{\partial V} = 0 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ここで、 V パラメータの定義を用いて式(A・3)を変形すると

$$\frac{f(V)}{V} + \frac{\partial f(V)}{\partial V} = 0 \quad (\text{A} \cdot 4)$$

が得られる。この式(A・4)を解けばスポットサイズが最小となる V 値が求められる。

式(A・4)は V に関係した項のみによって構成されているので、対称3層平板導波路ではコア半幅 a あるいは Δ によらずスポットサイズを最小とする V 値が存在する。式(A・4)を数値計算によって求めると本文に記したように $V=1.185$ が得られる。

(平成5年9月30日受付, 12月24日再受付)

國分 泰雄

OSA 各会員。

昭50横浜国大・工・電気卒。昭55東工大大学院博士課程了。同年同精密工学研究所助手。昭58横浜国大・工・電気助教授。光通信、光集積回路の研究に従事。著書「光ファイバ」, 「Fundamentals of Microoptics」など。応用物理学会, IEEE,

田村 修一

平1横浜国大・工・電子情報卒。平3同大学院修士課程了。現在、同博士課程在学中。光集積回路の研究に従事。応用物理学会会員。